

# 一阶旋转倒立摆输出反馈控制

于树友<sup>1,2</sup>, 褚建新<sup>2</sup>, 王银敏<sup>2</sup>

(1. 吉林大学 汽车仿真与控制国家重点实验室, 吉林 长春 130022;  
2. 吉林大学 控制科学与工程系, 吉林 长春 130012)

**摘要:**通过Lagrange方程建立倒立摆系统的模型,在平衡点处对模型线性化;由于摆杆及旋转臂的角速度不可测量,研究了一阶旋转倒立摆在不稳定平衡点处的状态观测器设计问题;分别采用极点配置和线性二次型最优控制策略设计了平衡控制器;采用能量控制策略设计了一阶旋转倒立摆的起摆控制器。采用Matlab/Simulink工具完成了仿真环节,并在实验中成功实现了对倒立摆的平衡控制和起摆控制,验证了平衡控制器和起摆控制器的有效性。该实验应用于自动控制相关课程教学,方便高效,具有较好的实验演示效果。

**关键词:**一阶旋转倒立摆; 观测器; 平衡控制; 起摆控制; 输出反馈

中图分类号: TP273 文献标识码: A 文章编号: 1002-4956(2020)03-0165-06

## Output feedback control of first order rotary inverted pendulum

YU Shuyou<sup>1,2</sup>, CHU Jianxin<sup>2</sup>, WANG Yinmin<sup>2</sup>

(1. State key laboratory of Automotive Simulation and Control, Jilin University, Changchun 130022, China;  
2. Department of Control Science and Engineering, Jilin University, Changchun 130012, China)

**Abstract:** The model of inverted pendulum system is established by Lagrange equation, and the model is linearized at the equilibrium point. Because the angular velocity of the swing bar and rotating arm is not measurable, the design on the state observer of the first order inverted pendulum at the unstable equilibrium point is studied. Pole assignment and linear quadratic optimal control strategies are used to design the balance controller, and by using the energy control strategy, the swing up controller of the first order rotary inverted pendulum is designed. Matlab/Simulink is used to complete the simulation, and the balance control and swing-up control of the inverted pendulum are successfully realized in the experiment, which verifies the effectiveness of the balance controller and swing-up controller. This experiment is applied to the teaching of the automatic control related courses, which is convenient and efficient, and has better experimental demonstration effect.

**Key words:** first order rotary inverted pendulum; observer; balance control; swing-up control; output feedback

倒立摆系统具有多变量、强耦合、非线性且不稳定等特性<sup>[1]</sup>,所有重心在上支点在下的问题都可以用倒立摆问题来概括。科研人员通过对倒立摆的控制检验自己的控制算法,直观地表现稳定性、可控性等关键问题。倒立摆有着深刻的工程背景,相关理论成果已经在直升飞机、火箭发射、人造卫星、机器人等方面得到了广泛应用<sup>[2-3]</sup>。

按运动方式分类,倒立摆主要有两类控制问题,

收稿日期: 2019-06-06

基金项目: 国家自然科学基金项目(6171101085);吉林省教育厅项目(1526982655808)

作者简介: 于树友(1974—),男,吉林长春,博士,教授,博士生导师,主要研究方向为预测控制、鲁棒控制。

E-mail: shuyou@jlu.edu.cn

一是使摆杆保持在竖直倒立位置的平衡控制,二是摆杆从静止下垂状态到竖直倒立方位所进行的起摆控制<sup>[4]</sup>。在进行平衡控制时,采用了基于观测器的输出反馈控制策略,分别采用极点配置法和最优控制策略设计平衡控制器。在本文中,针对摆杆及旋转臂角速度不可测量问题,研究了一阶旋转倒立摆在不稳定平衡点处的状态观测器设计问题,分别设计了降维观测器和高通滤波器对不可测状态进行观测。在进行起摆控制时,采用了能量控制策略。用Matlab/Simulink工具完成了仿真环节,并在实验环节成功完成了对倒立摆的平衡控制和起摆控制,验证了控制器的有效性。该方法应用于自动控制相关课程的实验教学,强化了学生对控制系统建模、控制器设计等理论知识的理解。

## 1 一阶旋转倒立摆的控制问题

一阶旋转倒立摆的旋转臂和摆杆可以简化成两个均匀的质量杆,其模型结构与相应的实物如图 1 所示,一阶旋转倒立摆的参数及物理意义见表 1。

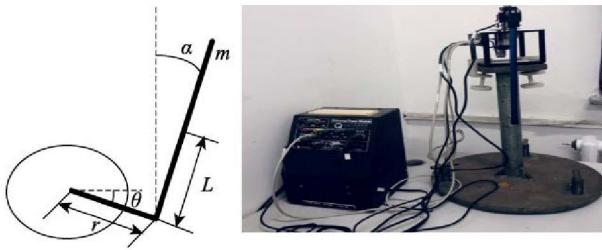


图 1 旋转倒立摆系统示意图

表 1 系统物理参数表

符号	物理意义及单位	数值
$L$	摆杆质心到转轴距离/m	0.168 25
$r$	旋转臂长度/m	0.215 9
$m$	摆杆质量/kg	0.127
$m_r$	旋转臂质量/kg	0.257
$J_1$	旋转臂的转动惯量/ $\text{kg}\cdot\text{m}^2$	$9.9829 \times 10^{-4}$
$J_2$	摆杆的转动惯量/ $\text{kg}\cdot\text{m}^2$	0.001 2
$g$	重力加速度/ $\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$	9.81
$k_t$	电机力矩系数/ $\text{Nm}\cdot\text{A}^{-1}$	0.007 7
$k_m$	反向电势系数/ $\text{Vs}\cdot\text{rad}^{-1}$	0.007 7
$K_g$	变速器齿轮比	70
$R_m$	直流电机电枢电阻/ $\Omega$	2.6
$\eta_m$	直流电机效率	0.69
$\eta_g$	变速器效率	0.9
$B_r$	旋转臂粘性阻尼系数/ $\text{Nms}\cdot\text{rad}^{-1}$	0.002 4
$B_p$	摆杆粘性阻尼系数/ $\text{Nms}\cdot\text{rad}^{-1}$	0.002 4
$V_m$	直流电机的输入电压/V	
$\theta$	旋转臂角位移/rad	
$\dot{\theta}$	旋转臂角速度/ $\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$	
$\alpha$	摆杆角位移/rad	
$\dot{\alpha}$	摆杆角速度/ $\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$	
$\tau$	直流电机输出转矩/Nm	

由图 1 可知,系统的动能包括:旋转臂转动的动能,摆杆摆动的动能,摆杆质心在水平方向和竖直方向的动能。定义零势能面为旋转臂转动的平面,则系统的动能和势能可分别记为  $T$  和  $V$ ,则:

$$T = \frac{1}{2}J_1\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J_2\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}m(r\dot{\theta} - L\dot{\alpha}\cos\alpha)^2 + \frac{1}{2}m(-L\dot{\alpha}\sin\alpha)^2 \quad (1)$$

$$V = mgL\cos\alpha \quad (2)$$

动能与势能的差记为  $H$ <sup>[5]</sup>,则:

$$H = T - V = \frac{1}{2}J_1\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J_2\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}m(r\dot{\theta} - L\dot{\alpha}\cos\alpha)^2 + \frac{1}{2}m(-L\dot{\alpha}\sin\alpha)^2 - mgL\cos\alpha \quad (3)$$

建立旋转倒立摆的 Lagrange 方程组:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial H}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial H}{\partial \theta} &= \tau - B_r\dot{\theta} \\ \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial H}{\partial \dot{\alpha}}\right) - \frac{\partial H}{\partial \alpha} &= -B_p\dot{\alpha} \end{aligned} \quad (4)$$

其中  $\tau$  代表直流伺服电机输出组转矩,且有:

$$\tau = \frac{\eta_g K_g \eta_m k_t (V_m - K_g k_m \dot{\theta})}{R_m} \quad (5)$$

计算式(4)中的各个分量<sup>[6]</sup>,并在平衡位置附近( $\alpha \leq 0.1745 \text{ rad}$ )进行线性化,得到如下线性方程组

$$\begin{aligned} (J_1 + mr^2)\ddot{\theta} - mLr\ddot{\alpha} &= \tau - B_r\dot{\theta} \\ (J_2 + mL^2)\ddot{\alpha} - mLr\ddot{\theta} - mgL\alpha &= -B_p\dot{\alpha} \end{aligned} \quad (6)$$

整理可得:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{m^2 L^2 r g}{J_T} & -\frac{(J_2 + mL^2)G}{J_T R_m} & \frac{-mLr B_p}{J_T} \\ 0 & \frac{mLg(J_1 + mr^2)}{J_T} & \frac{-mLr G}{J_T R_m} & \frac{-(J_1 + mr^2)B_p}{J_T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \alpha \\ \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{(J_2 + mL^2)\eta_g \eta_m K_g k_t}{J_T R_m} V_m \\ \frac{mLr \eta_g \eta_m K_g k_t}{J_T R_m} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \alpha \\ \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ \alpha \\ \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} \quad (7)$$

其中,  $J_T = J_1 J_2 + J_1 mL^2 + J_2 mr^2$ ,  $G = \eta_g \eta_m K_g^2 k_t k_m + B_r R_m$ 。

将相关参数值代入式(7),得到一阶旋转倒立摆系统的线性化模型:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}$$

具体表达为:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 81.4033 & -10.2536 & -0.9319 \\ 0 & 122.0545 & -10.332 & -1.3972 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \alpha \\ \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 83.4659 \\ 80.3162 \end{bmatrix} V_m$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \alpha \\ \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ \alpha \\ \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} \quad (8)$$

系统是以旋转臂角位移、摆杆角位移、旋转臂角速度和摆杆角速度为状态变量, 以直流电机输入电压为输入的4阶线性系统。系统满足可控性的充分必要条件 $\text{rank}[\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \quad \mathbf{A}^3\mathbf{B}] = 4$ , 系统满足可观性的充分必要条件 $\text{rank}[\mathbf{C} \quad \mathbf{CA} \quad \mathbf{CA}^2 \quad \mathbf{CA}^3]^T = 4$ , 所以系统是可控、可观的。其中,  $\mathbf{A}$ 为状态矩阵, 表示系统内部变量之间的联系;  $\mathbf{B}$ 为输入矩阵, 表示各个输入变量如何控制状态变量;  $\mathbf{C}$ 为输出矩阵, 表示输出如何反应状态变量。

## 2 观测器设计

由于倒立摆的摆杆和旋转臂的角速度( $\dot{\theta}$ 和 $\dot{\alpha}$ )无法直接测得, 需要利用状态观测器对系统状态进行观测<sup>[7]</sup>。本节讨论状态观测器的设计方法, 并对其观测效果进行对比和分析。

### 2.1 函数观测器

在设计降维函数观测器时, 首先给出了观测器的结构如下:

$$\dot{z} = \mathbf{F}z + \mathbf{G}y + \mathbf{H}u \quad (9)$$

其中,  $z$ 为待观测的状态,  $\mathbf{F}$ 、 $\mathbf{G}$ 、 $\mathbf{H}$ 是构成降维状态观测器的待求矩阵。 $\mathbf{F}$ 阵的选取与观测器的期望极点有关,  $\mathbf{G}$ 阵是一个任选的非奇异矩阵,  $\mathbf{H}$ 阵的值则需要求解一个Sylvester方程。从观测器综合原则出发, 取观测器的特征值负实部为 $\mathbf{A}-\mathbf{BK}$ 特征值的负实部的2~3倍<sup>[8]</sup>。以平衡控制器中的极点配置法为例, 并经过多次实验, 最终选取观测器极点为 $-10.5 \pm 10.5j$ 。列出期望的特征方程( $\lambda$ 为特征根):

$$(\lambda+10.5+10.5j)(\lambda+10.5-10.5j) = \lambda^2 + 21\lambda + 220.5 \quad (10)$$

则可得出矩阵 $\mathbf{F}$ :

$$\mathbf{F} = \mathbf{RF}_0\mathbf{R}^{-1} = \begin{bmatrix} -199 & 125.8 \\ -283.2 & 178 \end{bmatrix} \quad (11)$$

任取一个常矩阵 $\mathbf{G}$ , 使得 $[\mathbf{F}, \mathbf{G}]$ 满足完全可控条件。

求解Sylvester方程 $\mathbf{T}\mathbf{A}-\mathbf{FT}=\mathbf{GC}$ , 得:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0.9049 & -1.1231 & -0.0914 & 0.097 \\ 1.4229 & -1.7569 & -0.1378 & 0.144 \end{bmatrix} \quad (12)$$

记 $\mathbf{P}=[\mathbf{C} \quad \mathbf{T}]^T$ ,  $\text{rank}(\mathbf{P})=4$ 表明 $\mathbf{P}$ 为非奇异阵。若 $\mathbf{P}$ 为奇异阵, 则需重新选取 $\mathbf{R}$ 及 $\mathbf{G}$ 阵。

计算矩阵 $\mathbf{H}$ :

$$\mathbf{H} = \mathbf{TB} = \begin{bmatrix} 0.1631 \\ 0.0658 \end{bmatrix} \quad (13)$$

则函数观测器的实现为 $\mathbf{Q}=[\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2]$ :

$$\mathbf{Q} = \mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 37.4234 & -42.0901 & 703.0096 & -473.3705 \\ 25.9276 & -28.0742 & 672.6303 & -445.9723 \end{bmatrix} \quad (14)$$

则有:

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 37.4234 & -42.0901 \\ 25.9276 & -28.0742 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 703.0096 & -473.3705 \\ 672.6303 & -445.9723 \end{bmatrix} \quad (15)$$

综合得到降维函数观测器为:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \mathbf{F}z + \mathbf{G}y + \mathbf{H}u \\ \hat{x} &= \mathbf{Q}_1y + \mathbf{Q}_2z \end{aligned} \quad (16)$$

### 2.2 高通滤波器

一阶倒立摆系统中两个不能直接测得的状态变量 $\dot{\theta}$ 和 $\dot{\alpha}$ 分别是可测变量 $\theta$ 和 $\alpha$ 的一阶微分。由于微分环节不稳定, 故采用一阶高通滤波器来近似一阶微分环节。选取如下形式的一阶高通滤波器:

$$H(s) = \frac{62.8s}{s + 62.8} \quad (17)$$

图2为高通滤波器状态观测结构图, 图3为高通滤波器幅相曲线特性。从图3可以看出, 在频率 $\omega = 0$

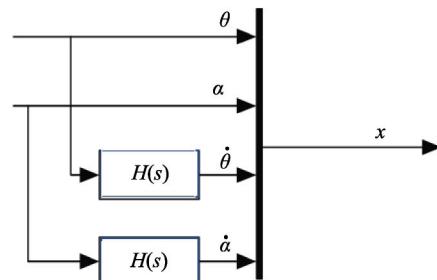


图2 高通滤波器状态观测结构图

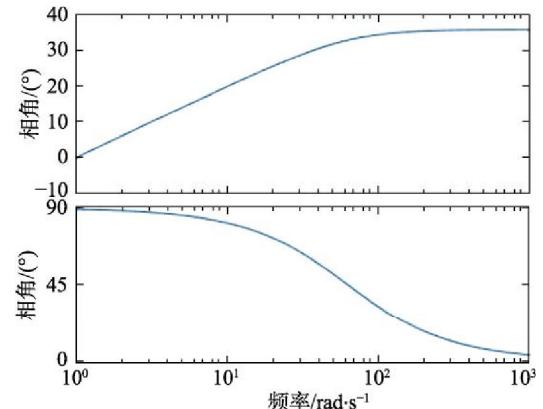


图3 高通滤波器幅相曲线特性

附近一阶高通滤波器  $H(s)$  可以很好地近似一阶微分环节。

### 2.3 观测效果分析

为了对观测效果进行比较, 现假设旋转臂角速度  $\dot{\theta}$ 、摆杆角速度  $\dot{\alpha}$  都可测, 通过 Simulink 仿真输出两个状态变量的大小, 再使加入观测器观测到的状态变量与之比较。为了使仿真结果更具有说明性, 采用平衡控制的仿真过程来产生一个动态环境, 取极点配置法设计的状态反馈矩阵, 仿真结果如图 4、图 5 所示。

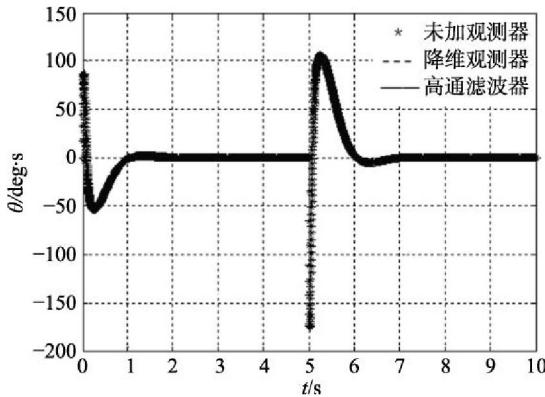


图 4  $\theta$  观测结果图

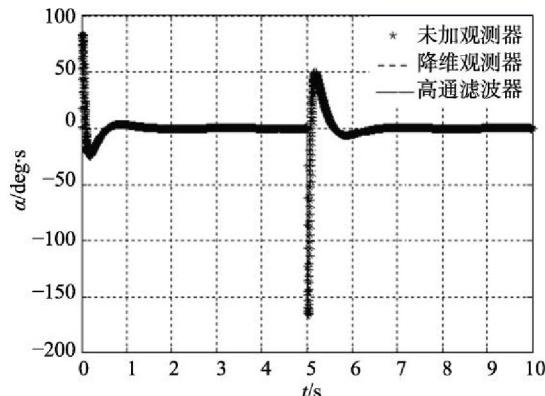


图 5  $\dot{\alpha}$  观测结果图

从仿真结果可以看出, 降维状态观测器的观测效果很好。考虑到针对极点配置法以及 LQR 法设计状态反馈控制器时, 观测器的形式是不同的, 同时由于实验要反复多次进行, 状态反馈矩阵  $K$  经常会发生变化, 所以采用降维状态观测器显然会大大增加实验负担。采用高通滤波器进行状态观测时, 观测曲线比较平滑, 且高通滤波器的结构不会随闭环系统极点的变化而变化, 因此在接下来的仿真及实验过程中, 都将采用高通滤波器来进行状态观测。

### 3 平衡控制器设计

研究一阶旋转倒立摆的平衡控制问题。采用了基于观测器的输出反馈控制策略, 考虑到线性系统的分

离原理, 状态观测器和状态反馈控制器可以独立设计。本节分别用极点配置和 LQR 两种控制方法实现倒立摆的平衡控制。

#### 3.1 极点配置控制器设计

由于系统参数矩阵  $(A, B)$  可控, 可以寻找合适的状态反馈矩阵  $K$ , 使系统闭环极点达到期望值。我们期望闭环系统的超调量和调节时间为:

$$\begin{aligned} M_p &\leqslant 5\% \\ T_s &\leqslant 2 \text{ s} \end{aligned} \quad (18)$$

假设该闭环系统极点由一对共轭闭环主导极点和两个非主导极点构成。系统的动态特性主要由共轭闭环主导极点决定, 与二阶欠阻尼系统具有相似的动态特性, 则二阶欠阻尼系统中超调量和调节时间为:

$$\begin{aligned} M_p &= e^{\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \\ T_s &= \frac{4}{\omega_n\zeta} \\ S_{1,2} &= -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \end{aligned} \quad (19)$$

其中,  $\zeta$  为欠阻尼二阶系统的阻尼系数,  $\omega_n$  为自然角频率。

根据式 (18) 和式 (19) 可以得到系统的一对闭环主导极点:

$$S_{1,2} = -2.8 \pm j2.86 \quad (20)$$

另外两个非主导极点应满足<sup>[9]</sup>:

$$\operatorname{Re}(S_{3,4}) > 5\operatorname{Re}(S_{1,2})$$

故选取:

$$\begin{aligned} S_3 &= -30 \\ S_4 &= -40 \end{aligned} \quad (21)$$

由式 (20) 和式 (21) 可以确定系统期望的特征方程为:

$$\begin{aligned} (s+2.8-j2.86)(s+2.8+j2.86)(s+30)(s+40) = \\ s^4 + 75.6s^3 + 1608s^2 + 7840s + 19200 \end{aligned} \quad (22)$$

相应得到状态反馈矩阵为:

$$K_1 = [-5.28 \quad 30.14 \quad -2.65 \quad 3.55] \quad (23)$$

#### 3.2 LQR 控制器设计

采用 LQR 法设计的闭环控制系统, 其控制性能主要由加权矩阵  $Q$  和  $R$  决定, 加权矩阵  $Q$  和  $R$  的选择反映能耗和误差的折中。本文取  $R$  阵为 1。 $Q$  阵的对角阵  $q_i, i=1, 2, 3, 4$  表示设计者对状态变量  $x_i$  的关注程度, 越重视某个状态变量, 越希望其误差分量尽可能小,  $Q$  的对角元素相应的  $q_i$  就要取得越大<sup>[10]</sup>。在一阶旋转倒立摆的控制过程中, 主要目标就是使摆杆倒置稳定, 也就是说对状态变量  $\alpha$  的重视程度最高, 其对应的值也应该最大。在本文中取:

$$Q = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 75 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, R = 1 \quad (24)$$

计算得出最优反馈矩阵为:

$$K_2 = [-2.2361 \quad 27.9627 \quad -2.261 \quad 3.8368] \quad (25)$$

### 3.3 控制效果及分析

极点配置和 LQR 两种控制算法作用下的旋转臂角位移  $\theta$ 、摆杆角位移  $\alpha$  以及直流电机输出电压  $V_m$  的仿真结果分别如图 6、图 7 和图 8 所示。

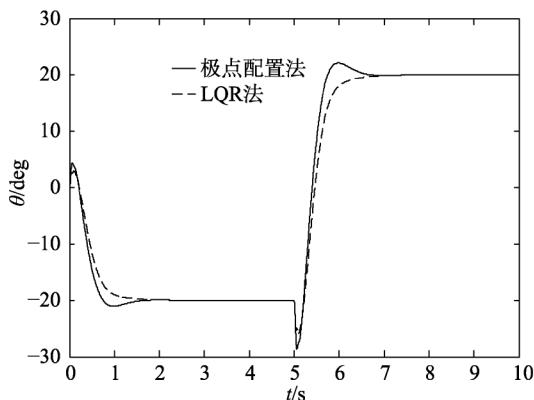


图 6  $\theta$  的仿真结果图

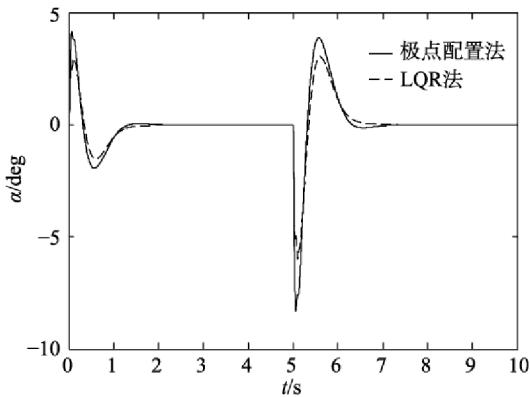


图 7  $\alpha$  的仿真结果图

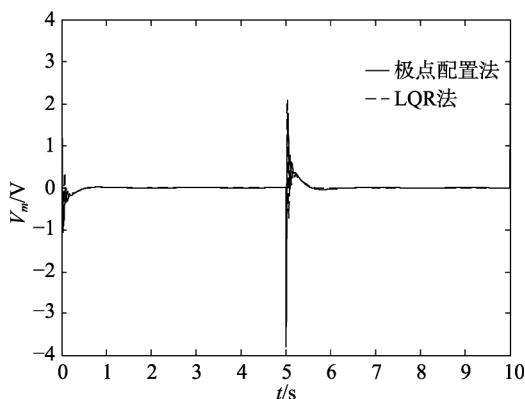


图 8  $V_m$  的仿真结果图

由图 6 可以看出, LQR 法设计的控制器控制系统, 在  $\theta$  值突变时其旋转臂旋转的幅度较极点配置法小, 但是扰动影响持续的时间更长一些。从图 7 和图 8 可见, 将 LQR 法设计的控制器运用到倒立摆的控制时, 其摆杆角位移波动的幅度和直流电机输出电压波动的幅度更小, 即损耗的能量更少。

为了验证两个平衡控制器的实用性, 必须进行具体的平衡控制实验。本文的实验借助 QuaRC 软件, 在 Matlab/Simulink 中搭建了控制模型来实现实时控制。在旋转臂上加入幅值为 20、周期为 10 的方波信号进行扰动测试, 可以验证控制算法的抗干扰能力, 实验结果如图 9、图 10、图 11 所示。

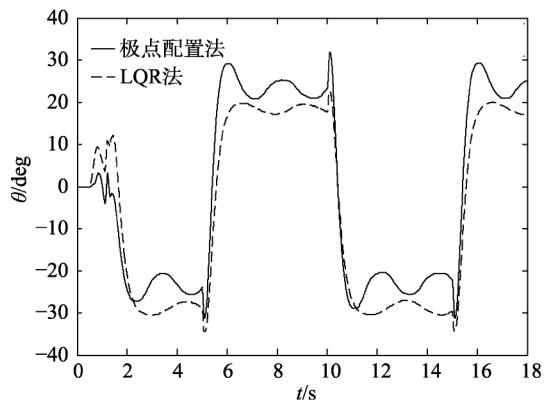


图 9  $\theta$  对比图

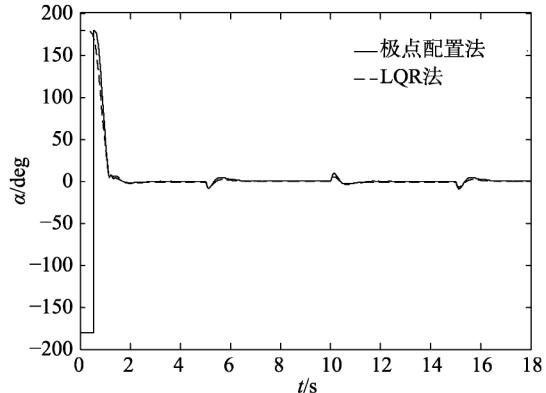


图 10  $\alpha$  对比图

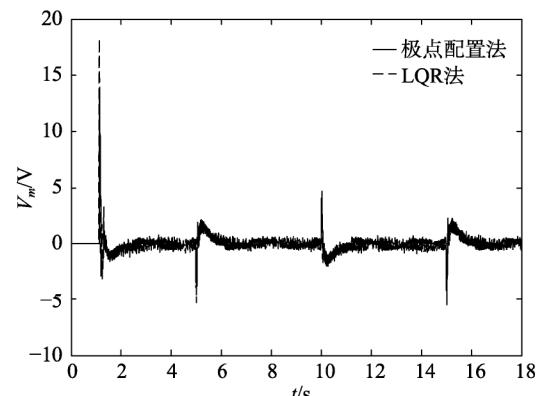


图 11  $V_m$  对比图

从图 9 可以看出, 当旋转臂受到方波信号干扰时, 采用 LQR 法控制的倒立摆的旋转臂不会出现转动特别剧烈的情况。从图 10 和图 11 可以看出, 在受到干扰时, 采用 LQR 法设计的控制器使倒立摆的摆杆摆动幅度更小, 电机输出能量也更少, LQR 法的优越性非常明显, 这样的实验结果与上述仿真结果一致。

#### 4 起摆控制器设计

起摆控制是指摆杆从常见的下垂状态运动到竖直向上状态的过程, 本节采用能量控制策略讨论摆杆的起摆控制问题<sup>[11]</sup>。以摆杆处于自然下垂状态时质心所在的位置为零势能点。

记  $E$  为摆杆的机械能, 则:

$$E = E_p + E_k = \frac{1}{2} J_2 \dot{\alpha}^2 + mgL(1 - \cos \alpha) \quad (26)$$

摆杆机械能的动态特性为<sup>[12]</sup>:

$$\frac{dE}{dt} = \dot{\alpha}(J_2 \ddot{\alpha} + mgL \sin \alpha) = -mLa\dot{\alpha} \cos \alpha \quad (27)$$

取 Lyapunov 函数:

$$V = (E - E_r)^2 / 2 \quad (28)$$

其中  $E_r$  为摆杆在竖直向上位置的势能。

为使系统渐近稳定, 则取轴加速度:

$$a = (E - E_r)\dot{\alpha} \cos \alpha \quad (29)$$

在实际的倒立摆系统中, 一切动作的实现都依赖电机的输出, 轴加速度  $a$  的改变也不例外。在旋转倒立摆系统中有:

$$\tau = m_r r a \quad (30)$$

由电机输出转矩与电压的关系, 可以得出:

$$V_m = \frac{R_m m_r r a}{\eta_g K_g \eta_m k_t} + K_g k_m \dot{\theta} \quad (31)$$

实验结果及分析如图 12、图 13、图 14 所示。其中,  $\theta$  和  $\alpha$  分别为旋转臂角位移和摆杆角位移。

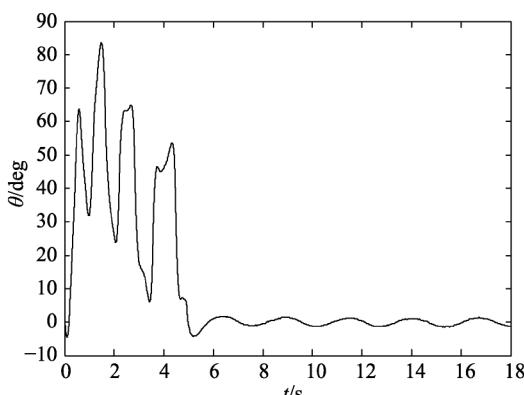


图 12  $\theta$  变化图

由实验结果可以看出, 系统在 7 s 左右即可达到稳定状态, 控制效果较好, 实验成功。

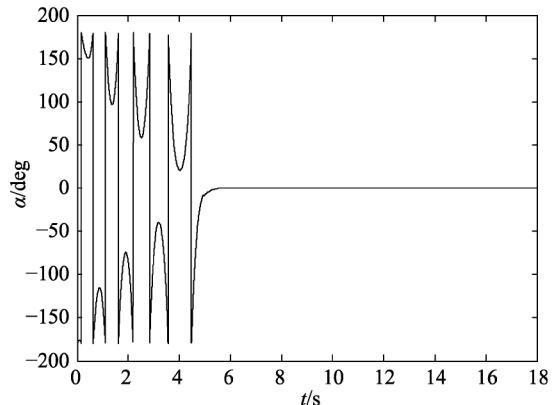


图 13  $\alpha$  变化图

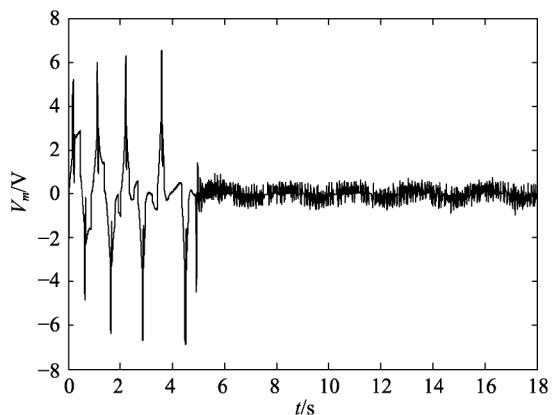


图 14  $V_m$  变化图

#### 5 结语

一阶旋转倒立摆要通过对旋转臂的控制来实现对摆杆的控制, 使摆杆最终能够处于倒置稳定状态。分别用极点配置法以及 LQR 法设计倒立摆的平衡控制器。仿真及实验对比结果表明, 用 LQR 法设计的控制器控制效果更好。由于旋转臂角速度和摆杆角速度不可测量, 采用高通滤波器观测不可测量的状态。采用能量控制策略设计倒立摆的起摆控制器, 并通过实验验证了控制器的有效性。通过实验还验证了一阶旋转倒立摆系统模型及所设计的控制器的有效性, 也进一步证明了该教学平台操作简单、稳定可靠。将该实验应用于本科教学, 达到了以下教学目的:

(1) 建立系统数学模型, 掌握控制器的设计过程, 为学生今后分析类似的控制系统、设计算法提供思路;

(2) 熟悉 Matlab 编程环境, 掌握 Matlab 仿真实验设计与分析;

(3) 掌握一阶旋转倒立摆的工作原理和应用, 通过实验直观展示了系统工作过程。

该一阶旋转倒立摆实验教学在自动控制相关课程

(下转第 199 页)

中写的，“一个月相对于大学四年或许是短暂的，但所学到的东西相对于时间的占比却多得多”。

## 参考文献 (References)

- [1] 陈吉宁. 全面深化教育教学改革 大力提升人才培养质量[J]. 清华大学教育研究, 2014, 35(6): 1–5.
- [2] 杨斌. 践行“三位一体”教育理念 全面建设一流人才培养模式[J]. 清华大学教育研究, 2018, 39(3): 1–6.
- [3] 李双寿, 李乐飞, 孙宏斌, 等. “三位一体、三创融合”的高校创新创业训练体系构建[J]. 清华大学教育研究, 2017, 38(2): 111–116.
- [4] 覃川. 大学文化建设与大学生价值塑造[J]. 社会主义核心价值观研究, 2017, 3(3): 63–69.
- [5] 顾明远. 浅谈中西大学价值观之异同[J]. 高等教育研究, 2017, 38(3): 1–3.
- [6] 房秀荣. 教学实践中的培养与创新模式探索[J]. 高教学刊, 2017(21): 47–49.
- [7] 尹艳红, 幸康虔, 沈东兵. 生产实习环节中沟通与自身管理初探[J]. 教育教学论坛, 2019(14): 9–10.
- [8] 王明富. 顶岗实习学生人身伤害事故的责任认定[J]. 当代职业教育, 2016(9): 24–27.
- [9] 陈敏曦. 构建能源互联网实现能源革命宏伟蓝图：对话清华大学能源互联网创新研究院副院长高峰[J]. 中国电力企业管理, 2017(22): 52–55.
- [10] 玄光男, 程润伟. 遗传算法与工程优化[M]. 于歆杰, 周根贵, 译. 北京: 清华大学出版社, 2004.
- [11] 黄海燕, 杨福源, 魏长征, 等. 项目导向式的校企合作专业实践教育模式探索[J]. 实验技术与管理, 2015, 32(8): 37–39.
- [12] 韩景芸, 宋崴, 李晓明, 等. 交叉学科的建构式生产实习模式研究[J]. 实验技术与管理, 2019, 36(4): 245–249.
- [13] 李曼丽. 变革中的实践教育理念：清华大学工业工程系案例分析[J]. 高等工程教育研究, 2006(2): 22–25.
- [14] 董嘉佳, 康重庆. 生产实习考核方式的探索[J]. 实验室研究与探索, 2012, 31(7): 361–363.

(上接第 170 页)

中的应用, 将大大提高教学质量与效果。以往的实验内容多是在计算机上完成的, 需要学生自己亲自动手的该实验将大大提高学生的热情与积极性。该实验形式是值得肯定的, 应多提供类似机会, 发挥学生的主观能动性, 使学生变被动学习为主动学习, 增大科研兴趣, 提升实践能力, 培养团队精神, 为进入工作岗位打下坚实基础。

## 参考文献 (References)

- [1] 孙建中, 杨彬, 李俊丽. 滑模变结构控制在单级倒立摆系统中的应用研究[J]. 机械与电子, 2010(9): 69–72.
- [2] 戴先中. 自动化科学与技术学科的内容、地位与体系[M]. 北京: 高等教育出版社, 2003.
- [3] YEONHOON K, SOO H K, YOON K K. Dynamic analysis of a nonholonomic two-wheeled inverted pendulum robot[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2005, 44(1): 25–46.
- [4] 陈琳. 基于 T-S 模型的倒立摆系统模糊控制[D]. 长春: 吉林大学, 2006.

大学, 2006.

- [5] 靳希, 鲁炜. Lagrange 方程应用于电系统和机电系统运动分析[J]. 上海电力学院学报, 2003(4): 1–4.
- [6] 郭贵军. 基于 T-S 模糊模型的旋转倒立摆系统控制[D]. 长春: 吉林大学, 2008.
- [7] 石长学, 佟绍成. 基于观测器的混合直接自适应模糊辨识与控制[J]. 辽宁工业大学学报(自然科学版), 2009, 29(1): 8–14.
- [8] 郑大钟. 线性系统理论[M]. 北京: 清华大学出版社, 2002.
- [9] LAI K Y, XIAO J, HU X G, et al. Modeling and control for stability and rotation velocity of a rotary inverted pendulum[J]. Automatic, 2000: 557–562.
- [10] 江晨. 旋转式倒立摆的控制算法研究及实验系统设计[D]. 苏州: 苏州大学, 2010.
- [11] ÅSTRÖM K J, FURUTA K. Swinging up a pendulum by energy control[J]. Industrial Electronics and Applications, 2000, 36(2): 287–295.
- [12] 张磊, 李长春. 小车倒立摆起摆的控制算法的研究与仿真实现[J]. 工业控制计算机, 2008, 21(12): 40–42.