

# 车辆自主漂移改进保代价控制

于树友<sup>1,2</sup>, 张世硕<sup>1</sup>, 刘泽澎<sup>1</sup>, 林宝君<sup>1†</sup>, 陈虹<sup>1,3</sup>

(1. 吉林大学通信工程学院, 长春 130025; 2. 吉林大学汽车底盘集成与仿生全国重点实验室, 长春 130025;  
3. 同济大学电子与信息工程学院, 上海 200092)

**摘要:** 研究车辆的稳态漂移控制问题, 提出一种车辆自主漂移改进保代价控制方法. 首先, 构建一个三自由度的车辆动力学模型, 在模型中考虑轮胎非线性的影响; 然后, 利用所建立模型计算系统平衡点, 并基于相平面法分析车辆系统稳定平衡点、不稳定平衡点与车辆漂移状态间的关系; 接着, 引入 Koopman 算子理论, 建立能够表征车辆非线性特性的近似线性模型, 同时, 给出能够处理系统约束的改进保代价控制律存在条件和构造方法, 并根据近似线性模型设计基于改进保代价的状态反馈控制器, 使得车辆状态保持在期望不稳定平衡点的同时保证控制约束; 最后, 通过 Carsim-Simulink 联合仿真结果表明了所提出方法在实现持续自主漂移和确保车辆安全方面的有效性.

**关键词:** 车辆漂移控制; Koopman 算子; 最优控制; 保代价控制

**中图分类号:** TP273 **文献标志码:** A

**DOI:** 10.13195/j.kzyjc.2024.1343

**引用格式:** 于树友, 张世硕, 刘泽澎, 等. 车辆自主漂移改进保代价控制 [J]. 控制与决策, 2025, 40(9): 2727-2738.

## Improved guaranteed cost control for autonomous vehicle drifting

YU Shu-you<sup>1,2</sup>, ZHANG Shi-shuo<sup>1</sup>, LIU Ze-peng<sup>1</sup>, LIN Bao-jun<sup>1†</sup>, CHEN Hong<sup>1,3</sup>

(1. College of Communication Engineering, Jilin University, Changchun 130025, China; 2. National Key Laboratory of Automotive Chassis Integration and Bionics, Jilin University, Changchun 130025, China;  
3. College of Electronics and Information Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China)

**Abstract:** In this paper, the problem of steady drift control of vehicles is studied, and an autonomous vehicle drifting control method based on improved guaranteed cost control is proposed. Firstly, a three-degree-of-freedom vehicle dynamics model is constructed, in which the influence of tire nonlinearity is considered. Then the equilibrium point of the vehicle system is calculated by using the established model, and the relationship between the stable equilibrium point, the unstable equilibrium point and the vehicle drift state is analyzed based on the phase plane method. Then, the Koopman operator theory is introduced to derive an approximate linear model that retains the nonlinear characteristics of the vehicle system. At the same time, the existence conditions and construction methods of the improved guaranteed cost control law that can deal with system constraints are given. A state feedback controller based on the improved guaranteed cost is designed according to the approximate linear model, which can maintain the vehicle's state around the desired unstable equilibrium point while ensuring control constraints. Finally, experiments on the Carsim-Simulink simulation platform show that the proposed method is effective in achieving autonomous vehicle drifting and ensuring vehicle safety.

**Keywords:** autonomous vehicle drifting; Koopman operator; optimal control; guaranteed cost control

## 0 引言

近些年, 车辆安全成为自动驾驶领域中<sup>[1-3]</sup>的一个关键问题. 随着人们对汽车主动安全性<sup>[4]</sup>的关注不断增加, 智能驾驶辅助系统得到了广泛发展. 现有的驾驶辅助系统已为车辆常规工况下的行驶提供了安全保障. 但是, 面对湿滑路面、冰雪路面、高速行驶等极限工况, 车辆的操纵稳定性<sup>[5]</sup>可能会受到严重

影响. 特别是在高速急转弯时, 车辆状态很容易超过其稳定区域, 从而导致侧滑<sup>[6]</sup>, 严重时可能会导致车辆侧翻, 威胁行车安全.

车辆漂移是赛车比赛中的一种技巧, 赛车手通过方向盘、油门和制动踏板的配合使得车辆状态脱离稳定区域, 在较大横摆角速度和侧滑角的情况下, 实现高速下的急剧转弯. 一些研究者模仿专业赛车

收稿日期: 2024-11-18; 录用日期: 2025-04-20.

基金项目: 吉林省自然科学基金项目 (20240402079GH); 国家自然科学基金项目 (62473167).

†通信作者. E-mail: linbj@jlu.edu.cn.

手的操作,设计漂移控制器使得车辆主动进入漂移状态. Leng 等<sup>[7]</sup>提出了一种深度强化学习方法,使得车辆沿预定的轨迹短暂漂移并进入停车点,实现了车辆的瞬态漂移;除瞬态漂移, Voser 等<sup>[8]</sup>提出了不稳定“漂移平衡点”的存在,指出在该平衡点,转弯与方向盘的方向相反,通过设计独立的比例速度控制器和状态反馈转向控制器,使得车辆状态稳定在了上述平衡点,保持车辆的漂移状态,这种持续漂移的过程被称为稳态漂移;在上述研究的基础上, Hindyeh 等<sup>[9]</sup>将三自由度模型融入其中,揭示了车辆在漂移平衡状态下的动态特性,包括较大的侧滑角、后轮侧向力饱和以及方向盘反打现象,并指出该平衡状态具有对于摩擦和速度变化的低敏感度.

目前,各种控制方法被应用于车辆的自主漂移控制,如滑模控制<sup>[10]</sup>、反步法<sup>[11]</sup>、线性二次型调节器(linear quadratic regulator, LQR)等. LQR 在漂移控制中的应用最为广泛, Bárdos 等<sup>[12]</sup>提出了一种多输入多输出 LQR 稳态漂移控制器,通过控制车辆状态维持在特定的不稳定漂移平衡点,使得车辆保持在漂移状态; Peterson 等<sup>[13]</sup>也设计了 LQR 控制器,使得车辆以漂移状态跟踪更为复杂的轨迹.但是,上述研究的 LQR 控制方法均无法处理约束,特别是控制量约束.在漂移这种极限的状态,由于汽车的物理限制而无法实现控制器所计算的控制输入带来的转向或驱动不足对于车辆安全是致命的.

Czibere 等<sup>[14]</sup>在考虑约束的情况下,使用了非线性模型预测控制(nonlinear model predictive controller, NMPC)算法,在不同的道路状况上均能够有效实现车辆的稳态漂移,但是,模型预测控制器的设计较为复杂,且在线计算负担重; Shi 等<sup>[15]</sup>也通过设计非线性模型预测控制器实现了车辆的稳态漂移,通过加入终端约束来确保系统的稳定性,并将控制器的优化问题转化为二次规划(quadratic programming, QP)问题,以降低求解负担,然而,系统的优化问题仍然需要在每个采样时刻在线求解; Cai 等<sup>[16]</sup>使用强化学习方法实现了车辆漂移,其控制器可以考虑系统的控制约束,但是需要大量的数据训练,且系统的稳定性无法证明.最优保代价控制<sup>[17]</sup>是一种反馈控制方法,其与 LQR 反馈控制的结构相似,最优保代价控制通过求解相应的矩阵不等式<sup>[18]</sup>得到反馈控制律,能够满足对应的约束.因此,使用最优保代价控制可在保留 LQR 简单结构和高计算效率优点的同时,保证控制量的约束,在实现车辆自主漂移方面具有巨大的优势.

在使用 LQR、保代价控制等最优控制方法时,

需要对非线性系统进行线性化.不同于在平衡点附近进行泰勒展开的线性化方法<sup>[19]</sup>, Koopman 算子理论<sup>[20]</sup>提供了一种新的线性化工具,其基本思想是将一个非线性系统提升至无限维线性空间,并相应地得到它的全局线性模型.由于无限维度的 Koopman 算子是无法实现,通常使用带控制的动态模态分解(dynamic mode decomposition with control, DMDC)<sup>[21-22]</sup>、深度神经网络(deep neural network, DNN)以及扩展动态模态分解(extended dynamic mode decomposition, EDMD)<sup>[23]</sup>等数据驱动方法,在有限的维度上近似无限维 Koopman 算子,从而为其在非线性和系统控制器设计中的应用提供可行的途径.目前, Koopman 算子已被广泛应用于非线性系统的分析和控制<sup>[24-25]</sup>.

针对 LQR 反馈控制无法处理系统约束的问题,本文提出一种改进保代价控制律的构造方法和基于改进保代价控制的车辆自主漂移控制方法.首先,基于 Koopman 算子理论得到非线性系统的高维线性化模型,根据得到的线性化模型设计改进保代价控制器;然后,将车辆状态驱动至期望的不稳定平衡点,以实现车辆的稳态漂移,同时满足系统的控制量约束,避免转向或驱动不足的现象发生;最后,进行 Carsim-Simulink 联合仿真,验证所提出方法的有效性.

## 1 知识基础

最优保代价控制的核心是在设计控制器时,使得系统的性能指标不会超过某个给定的上限.

考虑如下线性系统:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k). \quad (1)$$

其中:  $x(k) \in \mathbb{R}^n$  和  $u(k) \in \mathbb{R}^m$  分别为  $k$  时刻的系统状态量和控制量,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ . 对于系统(1), 定义如下性能指标:

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} [x^T(k)Qx(k) + u^T(k)Ru(k)]. \quad (2)$$

这里:  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$  为权重矩阵.

**引理 1**<sup>[26]</sup> 对于系统(1)和性能指标(2), 若存在一个矩阵  $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$  和一个对称正定矩阵  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , 使得

$$(A + BK)^T P (A + BK) - P + Q + K^T R K < 0, \quad (3)$$

则对于系统(1), 状态反馈控制律  $u(k) = Kx(k)$  称为其具有性能矩阵  $P$  的保代价控制律.

**引理 2**<sup>[27]</sup> 对于系统(1), 若控制律  $u(k) = Kx(k)$  是其具有性能矩阵  $P$  的保代价控制律, 则闭

环系统

$$x(k+1) = (A+BK)x(k) \quad (4)$$

是二次稳定的, 相应的闭环性能指标 (2) 的值满足

$$J \leq x_0^T P x_0. \quad (5)$$

其中:  $x_0$  为系统的初始状态,  $J^* = x_0^T P x_0$  为对应闭环系统的一个代价上限.

本文将在上述最优保代价控制的基础上, 提出一种能够保证系统控制量约束的改进保代价控制方法, 给出一种全新的保代价控制律的存在条件和构造方法, 并应用于车辆稳态漂移控制.

## 2 问题描述

### 2.1 车辆动力学模型

本文采用三自由度非线性车辆动力学模型<sup>[28]</sup> 作为系统模型, 模型示意图展示了模型中定义的坐标系和符号, 如图 1 所示. 三自由度车辆动力学模型的方程为

$$\begin{cases} \dot{v}_y = \frac{1}{m}(F_{yf} \cos \delta_f + F_{yr} - F_{Ay}) - v_x \gamma, \\ \dot{\gamma} = \frac{1}{I_z}(F_{yf} l_f \cos \delta_f - F_{yr} l_r), \\ \dot{v}_x = \frac{1}{m}(F_{xr} - F_{yf} \sin \delta_f - F_{Ax}) + v_y \gamma. \end{cases} \quad (6)$$

其中:  $v_y$ 、 $\gamma$  和  $v_x$  分别为车辆的横向速度、横摆角速度和纵向速度;  $F_{yr}$  和  $F_{xr}$  分别为后轮的侧向力和纵向力, 车辆为后轮驱动, 且不考虑前轮的纵向力,  $F_{yf}$  为前轮的侧向力;  $I_z$  为转动惯量;  $m$  为车辆质量;  $l_f$  和  $l_r$  分别为质心到前轴和后轴的距离;  $\delta_f$  为前轮转角; 本文还考虑了空气阻力对于横向速度和纵向速度的影响,  $F_{Ay}$  和  $F_{Ax}$  分别为横向和纵向的空气阻力, 有

$$\begin{cases} F_{Ay} = C_y A_{\text{air}} \frac{\rho}{2} v^2, \\ F_{Ax} = C_x A_{\text{air}} \frac{\rho}{2} v^2. \end{cases} \quad (7)$$

这里:  $v(v^2 = v_x^2 + v_y^2)$  为车辆速度,  $C_y$  和  $C_x$  分别为横向和纵向空气阻力系数,  $A_{\text{air}}$  为行驶方向的前沿面

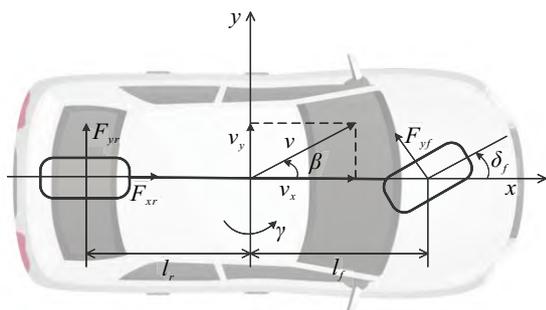


图1 三自由度车辆动力学模型

积,  $\rho$  为空气密度.

**注 1** 在本文的控制框架下, 车辆漂移状态时的姿态变化范围较为有限, 因此, 未考虑空气阻力系数随车辆姿态变化的影响; 文中假设空气阻力系数为常数, 以简化模型复杂度并便于研究车辆漂移控制问题.

### 2.2 轮胎模型

本文采用轮胎魔术公式<sup>[29]</sup> 计算轮胎力, 其反映了轮胎力与轮胎侧偏角间的非线性关系, 轮胎力与侧偏角的示意图如图 2 所示. 魔术公式表达式为

$$\begin{cases} F_{yf} = D_{sf} \sin(C_{sf} \arctan(B_{sf} \alpha_f)), \\ F_{yr} = D_{sr} \sin(C_{sr} \arctan(B_{sr} \alpha_r)). \end{cases} \quad (8)$$

其中:  $B_{sf}$ 、 $B_{sr}$ 、 $C_{sf}$ 、 $C_{sr}$ 、 $D_{sf}$  和  $D_{sr}$  为轮胎系数, 其数值皆通过拟合真实的轮胎数据得到;  $\alpha_f$  和  $\alpha_r$  为前轮和后轮的侧偏角, 即

$$\begin{cases} \alpha_f \approx \arctan(\beta + (l_f \gamma / v_x)) - \delta_f, \\ \alpha_r \approx \arctan(\beta - (l_r \gamma / v_x)). \end{cases} \quad (9)$$

这里:  $\beta = \arctan(v_y / v_x)$  为车辆的质心侧偏角, 当  $v_y$  的值很小时, 可看作  $\beta = v_y / v_x$ .

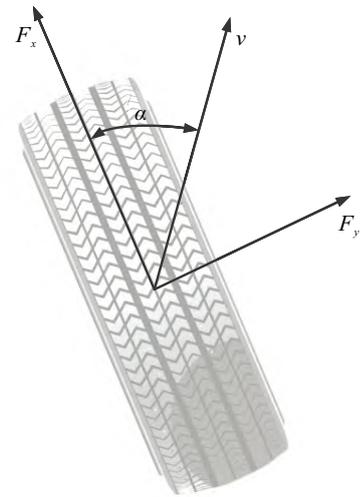


图2 轮胎力与轮胎侧偏角

### 2.3 系统平衡点与漂移状态

当式 (6) 所描述的动力学模型的状态导数均为 0 时, 车辆处于平衡状态, 即

$$\begin{cases} 0 = \frac{1}{m}(F_{yf}^{\text{eq}} \cos \delta_f^{\text{eq}} + F_{yr}^{\text{eq}} - F_{Ay}^{\text{eq}}) - v_x^{\text{eq}} \gamma^{\text{eq}}, \\ 0 = \frac{1}{I_z}(F_{yf}^{\text{eq}} l_f \cos \delta_f^{\text{eq}} - F_{yr}^{\text{eq}} l_r), \\ 0 = \frac{1}{m}(F_{xr}^{\text{eq}} - F_{yf}^{\text{eq}} \sin \delta_f^{\text{eq}} - F_{Ax}^{\text{eq}}) + v_y^{\text{eq}} \gamma^{\text{eq}}. \end{cases} \quad (10)$$

定义符号  $\xi^{\text{eq}}$  为系统处于平衡状态时系统状态量的值, 结合式 (6)、(8) 和 (9) 可知, 式 (10) 中存在 5 个未知量 ( $v_y^{\text{eq}}$ 、 $\gamma^{\text{eq}}$ 、 $v_x^{\text{eq}}$ 、 $\delta_f^{\text{eq}}$ 、 $F_{xr}^{\text{eq}}$ ), 当确定  $v_x^{\text{eq}}$  和  $\delta_f^{\text{eq}}$  时, 即

可求解系统平衡点.

当 $v_x^{eq} = 15 \text{ m/s}$ ,  $\delta_f^{eq} \in [-10^\circ, 10^\circ]$ 时, 系统平衡点的求解结果如图3所示. 稳定平衡点为车辆正常行驶和转弯时的状态, 由图3可知, 车辆处于不稳定

平衡点时, 车辆出现方向盘反打现象, 有较大的质心侧偏和横摆角速度, 且后轮轮胎力已接近饱和, 此时车辆处于漂移状态. 因此, 车辆不稳定平衡点为车辆漂移平衡点.

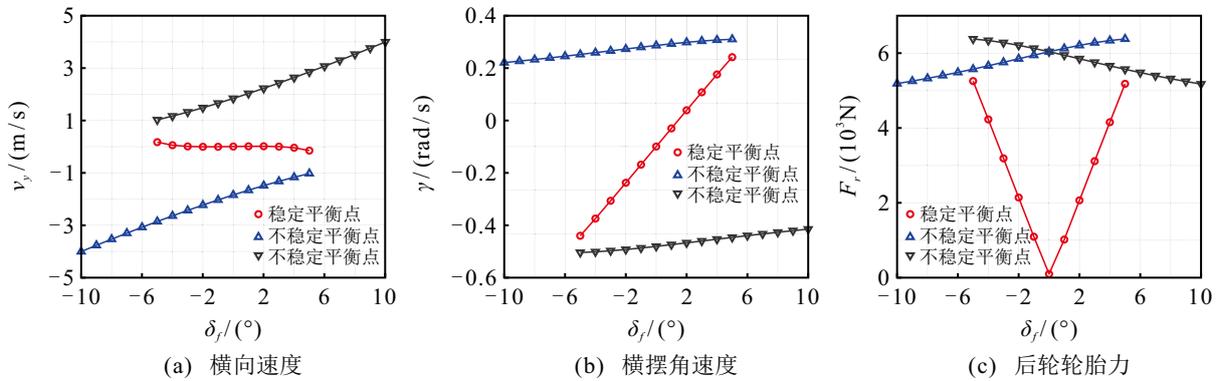


图3 系统平衡点

固定前轮转角 $\delta_f$ 和纵向速度 $v_x$ , 在多个初始条件下模拟车辆模型的响应, 绘制横摆角速度和横向速度绘制所有的状态轨迹, 即绘制 $(\gamma - v_y)$ 平面内

的相平面图<sup>[30]</sup>. 当 $v_x = 15 \text{ m/s}$ 时, 不同 $\delta_f$ 对应的相平面图如图4所示. 由图4可以明显看出, 没有相轨迹<sup>[31]</sup>收敛至漂移平衡点.

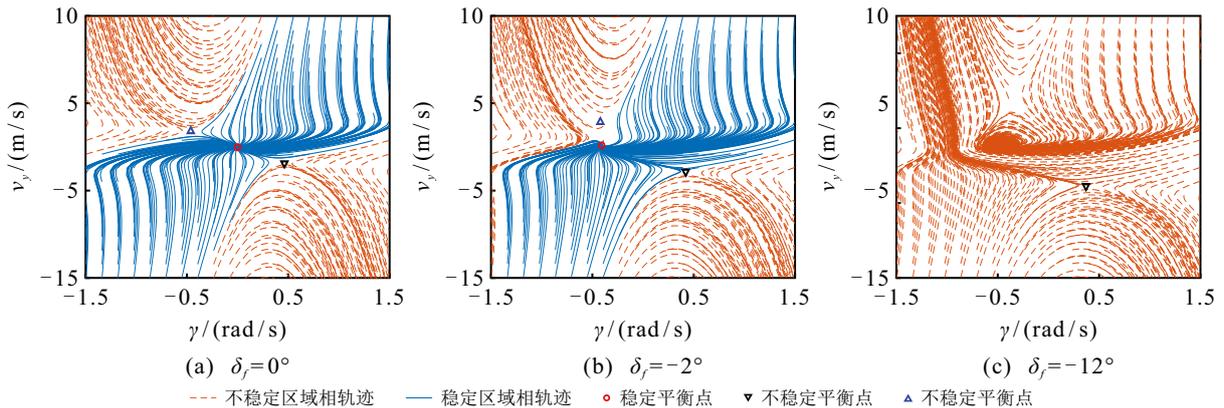


图4 系统相平面图

由图4可知, 当车辆状态不主动收敛, 且不施加外部控制时, 车辆将失去其横向稳定性. 同时, 随着前轮转角增大, 一个不稳定平衡点与稳定平衡点抵消, 此时相平面仅有一个不稳定的漂移平衡点, 只有主动控制车辆保持在不稳定平衡点上, 即令车辆主动进入漂移状态才能保持系统平衡, 保障行车安全.

2.4 控制目标

将系统方程(6)表述为

$$\dot{x} = F(x, u), \tag{11}$$

其中 $x = [v_y \ \gamma \ v_x]^T$ 和 $u = [F_{yf} \ F_{xr}]^T$ 分别为系统状态和控制输入.

本文主要研究基于改进保代价控制的车辆自主漂移控制方法, 以实现车辆的稳态漂移, 将车辆状态保持在漂移平衡点. 即使在高速和急转弯的极限工况下也能够保障行驶安全, 避免事故的发生. 故本文

的控制目标为

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x^{ref}(t)\| = 0, \tag{12}$$

其中定义符号 $x^{ref}$ 和 $u^{ref}$ 为不稳定平衡点处系统状态量以及控制量的值. 其次, 考虑到实际情况, 车辆纵向轮胎力均不能超过轮胎与地面的摩擦力, 即轮胎力应满足如下不等式约束:

$$\begin{cases} |F_{yf}| \leq \mu F_{zf}, \\ |F_{xr}| \leq \mu F_{zr}. \end{cases} \tag{13}$$

这里:  $\mu$ 为道路附着系数,  $F_{zf}$ 和 $F_{zr}$ 分别为前后轮的轮胎载荷.

3 改进保代价漂移控制器设计

本节介绍一种改进的保代价控制律存在条件和构造方法, 并设计一种基于车辆自主漂移改进保代价控制器, 以实现车辆的稳态漂移并处理系统的控

制量约束.

### 3.1 Koopman 算子模型

保代价控制在应用于非线性系统时, 需要对非线性模型线性化, 本文通过引入 Koopman 算子, 得到三自由度车辆动力学模型的近似线性模型, 用于控制器设计.

首先, 通过坐标变换将系统 (11) 的平衡点从  $(x^{\text{ref}}, u^{\text{ref}})$  变换为  $(0, 0)$ , 即

$$\Delta \dot{x} + \dot{x}^{\text{ref}} = F(\Delta x + x^{\text{ref}}, \Delta u + u^{\text{ref}}). \quad (14)$$

其中:  $\Delta x = x - x^{\text{ref}}, \Delta u = u - u^{\text{ref}}$ . 由于  $\dot{x}^{\text{ref}} = 0$ , 式 (14) 可写为  $\Delta \dot{x} = f(\Delta x, \Delta u)$ , 然后, 使用四阶龙格-库塔方法将其离散化, 得到采样时间  $T_s = 0.01 \text{ s}$  的离散系统为

$$\Delta x(k+1) = \tilde{f}(\Delta x(k), \Delta u(k)). \quad (15)$$

对于系统 (15), 当系统状态  $\Delta x$  和控制量  $\Delta u$  为 0 时, 车辆保持在稳态漂移状态. Koopman 算子模型的基本思想是将一个非线性系统提升至无限维线性空间, 定义  $\kappa$  为作用于观测函数  $\varphi$  的无限维 Koopman 算子. 在  $\kappa$  的作用下, 系统 (15) 可转变为如下线性系统<sup>[20]</sup>:

$$\begin{aligned} \kappa\varphi(\Delta x(k)) &= \varphi(\Delta x(k+1)) = \\ &\varphi(\tilde{f}(\Delta x(k), \Delta u(k))). \end{aligned} \quad (16)$$

无限维 Koopman 算子  $\kappa$  在实际中很难实现, 需要对  $\kappa$  进行有限维近似. 采用 DMDc 算法<sup>[21]</sup>, 利用有限维 Koopman 算子来构造线性模型, 如下所示:

$$\Delta x(k+1) = \tilde{A}\Delta x(k) + \tilde{B}\Delta u(k), \quad (17)$$

其中  $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  和  $\tilde{B} \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$  是需要辨识的矩阵. 系统 (17) 为线性系统, 但是可以反映系统 (15) 的非线性特性.

**注 2** 本文关注的重点是不稳定平衡点附近的非线性行为, 采用 Koopman 算子理论中常用的 DMDc 算法获取系统 (15) 的近似线性模型. DMDc 算法属于一种数据驱动的方法, 其不需要将非线性系统升维, 而是通过采集大量的系统演化数据, 构建数据矩阵来捕捉系统的动态特性, 并通过奇异值分解 (singular value decomposition, SVD) 方法提取系统的主要模态, 进而构建线性系统来近似系统的非线性行为. 文献 [21] 中首次提出了 DMDc 算法, 文献 [22] 中详细阐述了 DMDc 与 Koopman 算子间的关系. 限于篇幅, 本文未对 DMDc 算法进行更详细的介绍.

为辨识  $\tilde{A}$  与  $\tilde{B}$ , 通过系统方程 (15) 收集系统在一定采样周期内的  $N$  组状态和控制输入数据, 并构造如下矩阵:

$$\begin{aligned} X_1 &= [\Delta x_D(1), \dots, \Delta x_D(k_{\text{max}})], \\ X_2 &= [\Delta x_D(2), \dots, \Delta x_D(k_{\text{max}} + 1)], \\ U &= [\Delta u_D(1), \dots, \Delta u_D(k_{\text{max}})]. \end{aligned} \quad (18)$$

其中:  $\Delta x_D(i) \in \mathbb{R}^{3 \times N}$  和  $\Delta u_D(i) \in \mathbb{R}^{2 \times N}$  分别为  $i$  时刻收集到的系统状态和控制输入数据的集合,  $k_{\text{max}}$  为总的采样周期数,  $X_1 \in \mathbb{R}^{3 \times (k_{\text{max}} \times N)}$ ,  $X_2 \in \mathbb{R}^{3 \times (k_{\text{max}} \times N)}$ ,  $U \in \mathbb{R}^{2 \times (k_{\text{max}} \times N)}$ . 数据 (18) 矩阵可表示为

$$X_2 = [\tilde{A} \quad \tilde{B}] \begin{bmatrix} X_1 \\ U \end{bmatrix} = G\Omega. \quad (19)$$

这里:  $G = [\tilde{A} \quad \tilde{B}]$  为 Koopman 算子的有限维近似矩阵,  $\Omega = [X_1^T \quad U^T]^T$  为重构的增广数据矩阵. 对矩阵  $\Omega$  进行奇异值分解, 将奇异值分解的截断秩记为  $p$ . 本文中设置  $p = n$ , 矩阵  $\Omega$  可表示为

$$\Omega \approx \tilde{U}\tilde{\Sigma}\tilde{V}^T. \quad (20)$$

其中:  $\tilde{U} \in \mathbb{R}^{(n+m) \times n}$  为酉矩阵,  $\tilde{\Sigma} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  为对角阵. 为了从矩阵  $G$  中得到矩阵  $\tilde{A}$  和  $\tilde{B}$ , 将  $\tilde{U}$  分解为

$$\tilde{U} = \begin{bmatrix} \tilde{U}_1 \\ \tilde{U}_2 \end{bmatrix}. \quad (21)$$

这里:  $\tilde{U}_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\tilde{U}_2 \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . 然后, 通过下式即可计算矩阵  $\tilde{A}$  和  $\tilde{B}$ :

$$\tilde{A} = X_2\tilde{V}\tilde{\Sigma}^{-1}\tilde{U}_1^T, \quad (22)$$

$$\tilde{B} = X_2\tilde{V}\tilde{\Sigma}^{-1}\tilde{U}_2^T. \quad (23)$$

### 3.2 自主漂移改进保代价控制器设计

对于近似线性化后的系统模型 (17), 定义系统的性能指标为

$$J_D = \sum_{k=0}^{\infty} [\Delta x^T(k)Q_D\Delta x(k) + \Delta u^T(k)R_D\Delta u(k)]. \quad (24)$$

其中:  $Q_D \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $R_D \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  为权重矩阵.

此外, 考虑到不等式约束 (13), 系统的控制输入  $\Delta u$  应满足如下约束:

$$\begin{bmatrix} -u_1^{\text{max}} - F_{yf}^{\text{ref}} \\ -u_2^{\text{max}} - F_{xr}^{\text{ref}} \end{bmatrix} \leq \Delta u \leq \begin{bmatrix} u_1^{\text{max}} - F_{yf}^{\text{ref}} \\ u_2^{\text{max}} - F_{xr}^{\text{ref}} \end{bmatrix}. \quad (25)$$

其中:  $u_1^{\text{max}} = \mu F_{zf}$ ,  $u_2^{\text{max}} = \mu F_{zr}$ . 此处, 需要将上述系统控制量约束转化为对称形, 即

$$-\begin{bmatrix} \Delta u_1^{\text{max}} \\ \Delta u_2^{\text{max}} \end{bmatrix} \leq \Delta u \leq \begin{bmatrix} \Delta u_1^{\text{max}} \\ \Delta u_2^{\text{max}} \end{bmatrix}. \quad (26)$$

这里

$$\Delta u_1^{\text{max}} = \min(|-u_1^{\text{max}} - F_{yf}^{\text{ref}}|, |u_1^{\text{max}} - F_{yf}^{\text{ref}}|),$$

$$\Delta u_2^{\text{max}} = \min(|-u_2^{\text{max}} - F_{xr}^{\text{ref}}|, |u_2^{\text{max}} - F_{xr}^{\text{ref}}|).$$

下面通过引理表明能够满足控制约束 (26) 的保代价控制律的存在条件.

**引理 3<sup>[27]</sup>** 对于系统 (17) 和性能指标 (24), 若存在正常数  $\alpha$ , 矩阵  $K \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$ , 对称矩阵  $Z \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  和对称正定矩阵  $P \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ , 使得以下矩阵不等式成立:

$$(\tilde{A} + \tilde{B}K)^T P (\tilde{A} + \tilde{B}K) - P + Q_D + K^T R_D K < 0; \quad (27)$$

$$\Delta x_0^T P \Delta x_0 \leq \alpha; \quad (28)$$

$$\begin{bmatrix} Z & * \\ K^T & \alpha^{-1}P \end{bmatrix} \geq 0; \quad (29)$$

$$(Z)_{ii} \leq (\Delta u_i^{\max})^2, \quad i = \{1, 2\}. \quad (30)$$

则对于系统 (17), 状态反馈控制律  $\Delta u(k) = K \Delta x(k)$  是其具有性能矩阵  $P$  且满足约束条件 (26) 的保代价控制律. 其中:  $\Delta x_0$  为系统 (17) 初始时刻的状态,  $(Z)_{ii}$  为矩阵  $Z$  中的  $\{i, i\}$  项, 符号 \* 为对称矩阵中按照对角线对称的对应元素.

**证明** 由于矩阵  $K$  和矩阵  $P$  满足矩阵不等式 (27), 根据引理 1 和引理 2 可知, 控制律  $\Delta u(k) = K \Delta x(k)$  是系统的一个保代价控制律, 且闭环性能指标值满足  $J_D \leq \Delta x_0^T P \Delta x_0$ . 由式 (27) 可得, 对称正定矩阵  $P$  是闭环系统的一个 Lyapunov 矩阵, 因此, 对于任意的正整数  $k$ , 闭环系统的状态量  $\Delta x(k)$  满足  $\Delta x^T(k) P \Delta x(k) \leq \Delta x_0^T P \Delta x_0$ , 进而由不等式 (28) 可得到  $\Delta x^T(k) P \Delta x(k) \leq \alpha$ .

由矩阵的 Schur 补<sup>[32]</sup> 性质可知, 矩阵不等式 (29) 与  $\alpha K P^{-1} K^T \leq Z$  是等价的. 定义  $K_i$  为矩阵  $K$  的第  $i$  行向量, 则利用柯西-施瓦茨不等式可得到

$$\begin{aligned} |\Delta u_i(k)|^2 &= |K_i \Delta x(k)|^2 = \\ &|K_i P^{-\frac{1}{2}} P^{\frac{1}{2}} \Delta x(k)|^2 \leq \\ &\|K_i P^{-\frac{1}{2}}\|^2 \|P^{\frac{1}{2}} \Delta x(k)\|^2 = \\ &K_i P^{-1} K_i^T \Delta x^T(k) P \Delta x(k) \leq \\ &K_i P^{-1} K_i^T \alpha \leq (Z)_{ii}. \end{aligned} \quad (31)$$

因此, 由不等式 (30) 得到的控制律  $\Delta u(k) = K \Delta x(k)$  满足约束条件 (26).  $\square$

根据上述引理, 给出满足约束条件 (26) 的改进保代价控制律存在条件和构造方法.

**定理 1** 若存在正标量  $\alpha$ , 矩阵  $Y \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$ ,  $G \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ , 对称矩阵  $Z \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  和正定对称矩阵  $X \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ , 使得以下矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} G + G^T - X & * & * & * \\ \tilde{A}G + \tilde{B}Y & X & * & * \\ (Q_D)^{\frac{1}{2}}G & 0 & \alpha I & * \\ (R_D)^{\frac{1}{2}}Y & 0 & 0 & \alpha I \end{bmatrix} \geq 0; \quad (32)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & * \\ \Delta x_0 & X \end{bmatrix} \geq 0; \quad (33)$$

$$\begin{bmatrix} Z & * \\ Y^T & G + G^T - X \end{bmatrix} \geq 0; \quad (34)$$

$$(Z)_{ii} \leq (\Delta u_i^{\max})^2, \quad i = \{1, 2\}. \quad (35)$$

则对于系统 (17), 存在能够满足控制约束 (26) 的保代价控制律, 且当矩阵不等式组 (32) ~ (35) 存在可行解  $(\alpha, X, G, Y, Z)$  时, 状态反馈控制律  $\Delta u(k) = YG^{-1} \Delta x(k)$  是系统 (17) 满足控制约束 (26) 的一个保代价控制律, 对应闭环系统的性能指标  $J \leq \alpha$ .

**证明** 式 (27) 满足的充分必要条件<sup>[33]</sup> 为

$$\begin{bmatrix} P^{-1} & * & * & * \\ (\tilde{A} + \tilde{B}K)P^{-1} & P^{-1} & * & * \\ (Q_D)^{\frac{1}{2}}P^{-1} & 0 & I & * \\ (R_D)^{\frac{1}{2}}KP^{-1} & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \geq 0. \quad (36)$$

令  $X = \alpha P^{-1}$ , 式 (36) 等价于

$$\begin{bmatrix} X & * & * & * \\ (\tilde{A} + \tilde{B}K)X & X & * & * \\ (Q_D)^{\frac{1}{2}}X & 0 & \alpha I & * \\ (R_D)^{\frac{1}{2}}KX & 0 & 0 & \alpha I \end{bmatrix} \geq 0. \quad (37)$$

式 (32) 中:  $\{2, 2\}$  项表明  $X \geq 0$ ,  $\{1, 1\}$  项表明  $G + G^T \geq X$ . 由于  $X \geq 0$  和  $G + G^T \geq X$ , 矩阵  $G$  是非奇异的. 进一步可知  $(G - X)^T X^{-1} (G - X) \geq 0$ , 故有

$$0 \leq G + G^T - X \leq G^T X^{-1} G. \quad (38)$$

由于  $K = YG^{-1}$  并考虑到  $G + G^T - X \leq G^T X^{-1} G$ , 式 (32) 表明

$$\begin{bmatrix} G^T X^{-1} G & * & * & * \\ (\tilde{A} + \tilde{B}K)G & X & * & * \\ (Q_D)^{\frac{1}{2}}G & 0 & \alpha I & * \\ (R_D)^{\frac{1}{2}}KG & 0 & 0 & \alpha I \end{bmatrix} \geq 0. \quad (39)$$

对不等式 (39) 的两端左乘  $\text{diag}\{X(G^T)^{-1}, I, I, I\}$  并右乘  $\text{diag}\{(G)^{-1}X, I, I, I\}$ , 可得式 (37) 成立.

同理, 式 (34) 表明

$$\begin{bmatrix} Z & * \\ Y^T & G^T X^{-1} G \end{bmatrix} \geq 0. \quad (40)$$

对不等式 (40) 的两端左乘  $\text{diag}\{I, (G^T)^{-1}\}$  并右乘  $\text{diag}\{I, (G)^{-1}\}$ , 可得到

$$\begin{bmatrix} Z & * \\ (YG^{-1})^T & X^{-1} \end{bmatrix} \geq 0. \quad (41)$$

由  $X = \alpha P^{-1}$  和  $K = YG^{-1}$  可知, 式 (41) 与 (29) 是

等价的. 最后, 由于式  $X = \alpha P^{-1}$ , 根据矩阵的 Schur 补性质可知, 不等式 (33) 等价于 (28).  $\square$

**注 3** 需要指出的是, 所提出数据驱动建模和控制器设计主要针对不稳定平衡点附近的局部动态行为. 通过限定数据采集范围在局部区域内, 显著降低了模型误差. 即使模型存在一定误差, 由于所设计保代价控制器具备较高的稳定裕度, 能够有效抑制小扰动, 确保系统的稳定性并保证约束条件满足.

**注 4** 若基于数据驱动的 DMDc 方法存在较大建模误差, 则可将原系统描述为  $\Delta x(k+1) = (\tilde{A} + \Delta \tilde{A})\Delta x(k) + (\tilde{B} + \Delta \tilde{B})\Delta u(k)$ <sup>[34]</sup>, 并通过保代价控制能够处理含不确定项系统的特点<sup>[26]</sup> 解决建模精度不足的问题.

求解如下优化问题:

$$\begin{aligned} & \min_{\alpha, G, X, Y, Z} \alpha; \\ & \text{s.t. 式(31), (32), (33), (34)}. \end{aligned} \quad (42)$$

可得到离散系统 (16) 的保代价控制律为

$$\Delta u^*(k) = YG^{-1}\Delta x(k) = [\Delta F_{yf}^*(k) \quad \Delta F_{xr}^*(k)]^T.$$

## 4 仿真结果及分析

本节通过 Carsim-Simulink 联合仿真和对比实验, 展示所提出改进保代价控制方法的可行性和有效性以及车辆自主漂移的有效实施.

### 4.1 参数设置

车辆参数来自车辆动力学软件 Carsim 中的一辆装有 215/70R17 轮胎的 E 级轿车, 这些参数如表 1 所示.

表1 车辆模型参数

参数	单位	值
$m$	kg	1833
$I_z$	kg · m <sup>2</sup>	3065
$l_f/l_r$	m	1.4/1.65
$\mu$	—	0.5 ~ 0.75
$C_y/C_x$	—	-0.35/0.37
$A_{\text{air}}$	m <sup>2</sup>	1.8
$\rho$	kg/m <sup>3</sup>	1.206

保代价控制的权重矩阵选取如下:

$$Q = \begin{bmatrix} 2000 & 0 & 0 \\ 0 & 2500 & 0 \\ 0 & 0 & 5000 \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} 10^{-5} & 0 \\ 0 & 10^{-5} \end{bmatrix}.$$

**注 5** 在选择权重矩阵时, 本文的控制目标为跟踪期望的不稳定平衡点, 使得车辆保持在漂移状态, 因此, 在控制过程中, 本文更加关注车辆的状态量, 优先提高了状态误差的惩罚力度, 相对降低对控制

输入变化的约束, 以更好地适应漂移的动态需求.

### 4.2 DMDc 算法验证

本节对通过 DMDc 算法得到的线性模型进行验证实验, 并与雅可比线性化<sup>[35]</sup> 方法进行对比. 为了获得近似离散时间线性模型 (17), 收集系统 (15) 的输入-输出数据来构造数据矩阵. 总的采样周期数  $k_{\text{max}} = 80$ . 通过以下方式收集 200 条轨迹:

1) 在  $\Delta v_y \in [-2, 2]$  m/s,  $\Delta \gamma \in [-0.2, 0.2]$  rad/s,  $\Delta v_x \in [-2, 2]$  m/s 中随机选择状态的初始值;

2) 在  $\Delta F_{yf} \in [-1200, 1200]$  N,  $\Delta F_{xr} \in [-1200, 1200]$  N 中随机选择的控制输入.

**注 6** 由于 (0, 0) 是坐标变换后系统的期望平衡点, 收集数据的集合是对称的. 本文的控制目标保持车辆在不稳定平衡点处的漂移状态, 平衡点附近是控制策略设计的核心区域, 因此, 为了更好地拟合不稳定平衡点附近的非线性动力学, 数据采集的区间选择在漂移平衡点附近.

使用均方根误差 (RMSE) 来评估线性化后的模型与原系统 (15) 间的偏差, 即

$$\text{RMSE} = \frac{\sqrt{\sum_{k=1}^N \|\Delta x_{\text{line}}(k) - \Delta x_{\text{true}}(k)\|_2^2}}{\sqrt{\sum_{k=1}^N \|\Delta x_{\text{true}}(k)\|_2^2}} \times 100\%, \quad (43)$$

其中  $\Delta x_{\text{line}}(k)$  和  $\Delta x_{\text{true}}(k)$  分别为线性化后的系统和原系统 (15) 在第  $k$  时刻的系统状态.

选取  $N = 15$ , 通过在平衡点附近给定相同的初值  $\Delta x_{\text{line}}(0) = \Delta x_{\text{true}}(0) = [2 \quad 0.2 \quad -2]^T$  和控制输入  $\Delta u_{\text{line}}(k) = 1200 \sin(0.5 \times k)[1 \quad 1]^T$ , 对比通过雅可比线性化方法与通过 DMDc 算法得到的线性系统表征非线性系统 (15) 的能力, 当平衡点  $x^{\text{ref}}$  选择为  $[-7.43 \quad 0.21 \quad 30]^T$  时, 实验结果如图 5 所示. 其中: 虚线为原系统状态量, 点划线为通过雅可比线性化后系统的状态量, 实线为通过 DMDc 算法得到的线性系统的状态量.

此外, 在不同平衡点处线性化后的系统与原系统的均方根误差如表 2 所示. 表 2 结果表明, 通过 DMDc 算法得到的线性系统与原系统的偏差较小, 且均方根误差算法小于雅可比线性化方法得到的线性系统, 这表明在期望不稳定平衡点附近, 通过 DMDc 算法得到的线性化近似模型描述系统非线性特性的能力强于雅可比线性化方法.

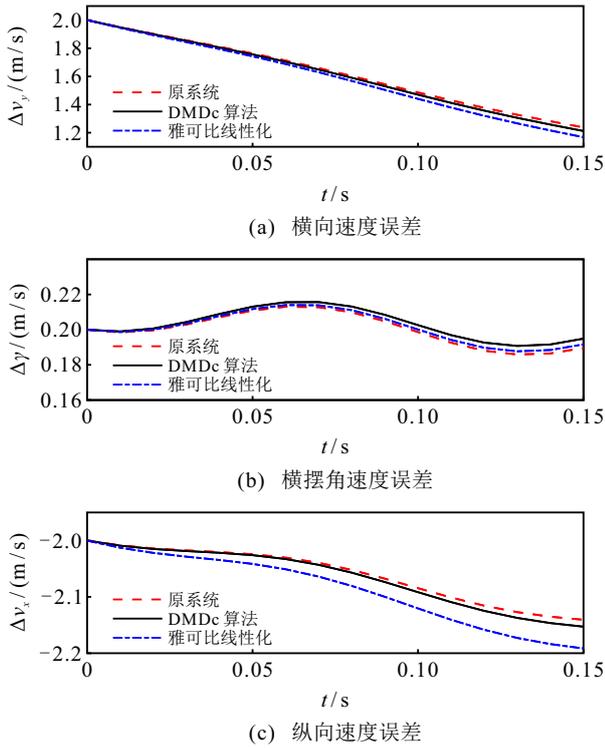


图5 模型验证对比实验 ( $x^{ref} = [-7.43 \ 0.21 \ 30]^T$ )

表2 线性系统与原系统的均方根误差 (RMSE)

漂移平衡点( $x^{ref}$ )	DMDC算法/%	雅可比线性化/%
$[-7.43 \ 0.21 \ 30]^T$	0.61	1.92
$[-5.11 \ 0.30 \ 20]^T$	0.91	1.97
$[-2.99 \ 0.53 \ 10]^T$	0.93	2.02

### 4.3 自主漂移仿真结果及分析

本节通过 Carsim-Simulink 联合仿真平台验证所提出算法的有效性. 设计 LQR 控制器、带有饱和环节的 LQR 控制器与所提出方法相对比, 并与文献

[15] 提出的 NMPC 算法在相同的仿真环境下进行了对比, 设计 4 种控制器时采用的模型均为通过 DMDC 算法得到的线性模型.

本文共设置了包含高、中、低速行驶以及湿滑路面等 4 种仿真工况, 具体如下:

仿真实验 1: 工况设置为在混凝土路面, 高纵向速度下车辆的稳态自主漂移, 选取  $v_x^{ref} = 30 \text{ m/s}$ ,  $\delta_f^{ref} = -10^\circ$ , 道路附着系数  $\mu = 0.75$ ;

仿真实验 2: 工况设置为在湿滑路面, 低纵向速度下车辆的稳态自主漂移, 选取  $v_x^{ref} = 10 \text{ m/s}$ ,  $\delta_f^{ref} = -15^\circ$ , 此时的道路附着系数  $\mu = 0.5$ ;

仿真实验 3: 工况设置为在混凝土路面, 中纵向速度下车辆的稳态自主漂移, 选取  $v_x^{ref} = 20 \text{ m/s}$ ,  $\delta_f^{ref} = -10^\circ$ , 道路附着系数  $\mu = 0.75$ ;

仿真实验 4: 工况设置为在混凝土路面, 低纵向速度下车辆的稳态自主漂移, 选取  $v_x^{ref} = 10 \text{ m/s}$ ,  $\delta_f^{ref} = -10^\circ$ , 道路附着系数  $\mu = 0.75$ .

4 组实验对应的漂移平衡点和系统初始状态如表 3 所示. 仿真结果如图 6 ~ 图 9 所示. 其中: 图 6(a)、图 7(a)、图 8(a) 和图 9(a) 为系统状态量, 图 6(b)、图 7(b)、图 8(b) 和图 9(b) 为系统控制量.

表3 仿真实验工况

	漂移平衡点( $x^{ref}$ )	初始状态( $\Delta x_0$ )
实验1	$[-7.43 \ 0.21 \ 30]^T$	$[2.1 \ 0.20 \ -1.8]^T$
实验2	$[-3.35 \ 0.38 \ 10]^T$	$[-1.5 \ 0.10 \ 1.0]^T$
实验3	$[-5.11 \ 0.30 \ 20]^T$	$[2.0 \ 0.15 \ -2.0]^T$
实验4	$[-2.99 \ 0.53 \ 10]^T$	$[2.0 \ 0.15 \ -2.0]^T$

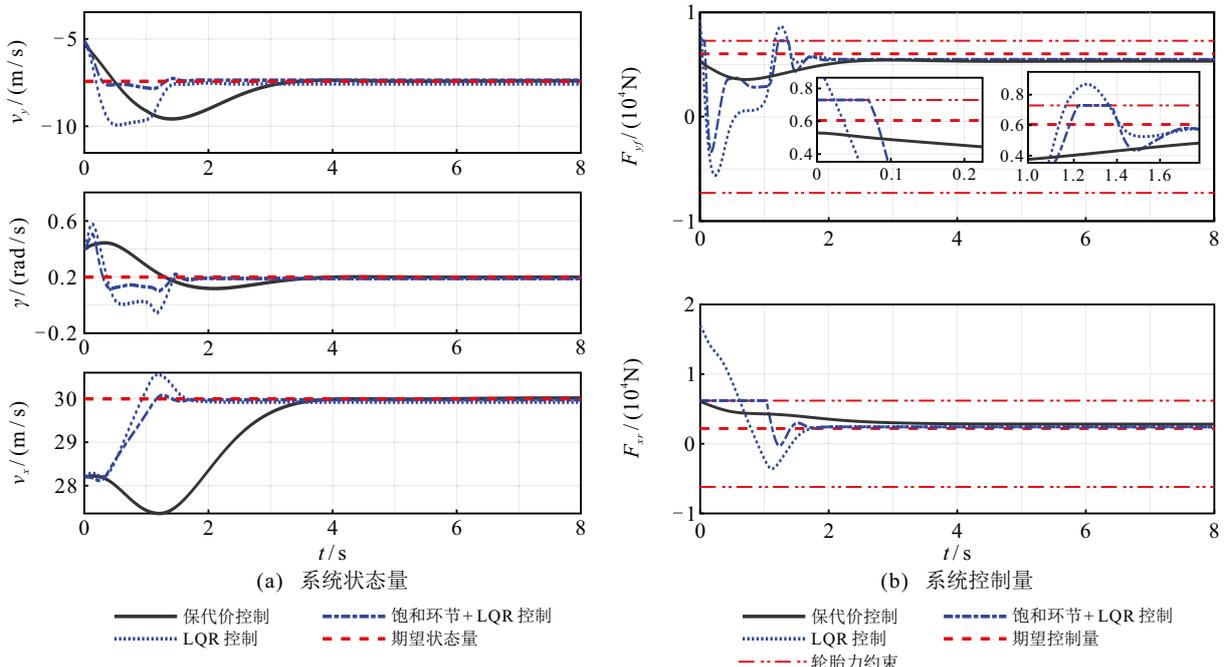


图6 仿真结果 (实验 1)

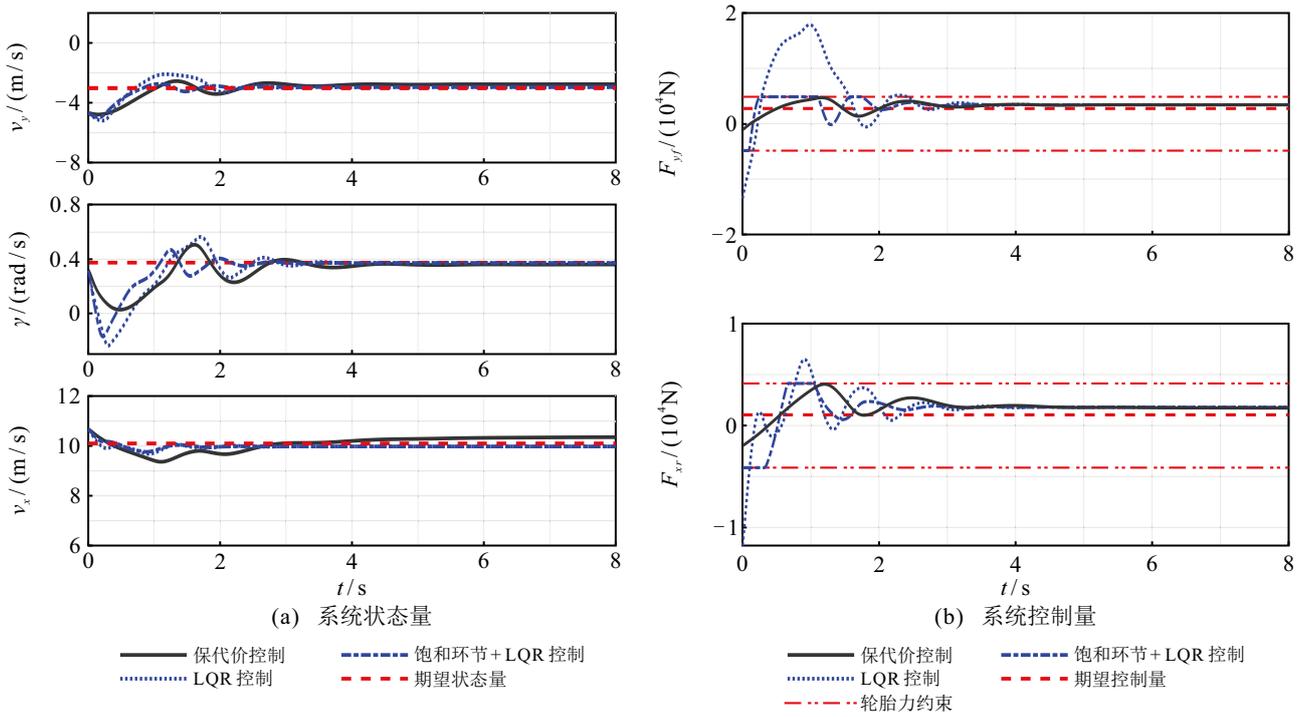


图7 仿真结果 (实验 2)

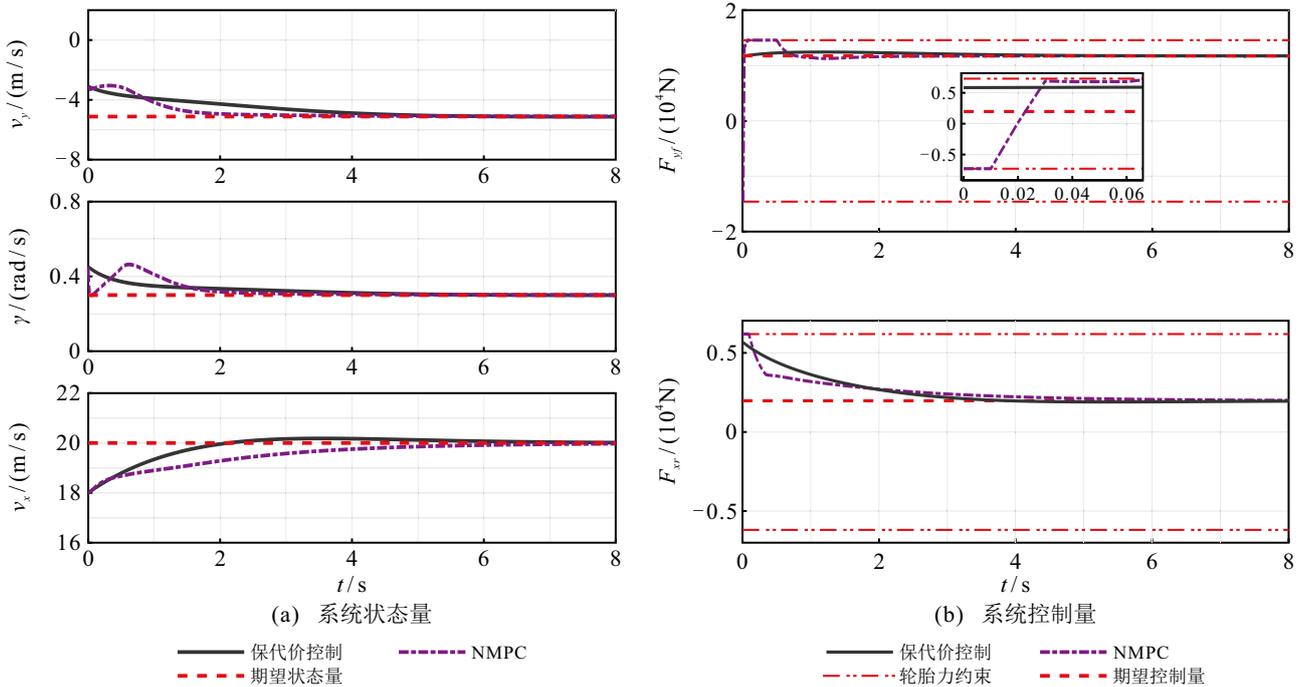


图8 仿真结果 (实验 3)

仿真结果显示所提出方法能够使得车辆状态跟踪期望的不稳定平衡点,同时满足控制约束.在车辆状态保持在不稳定平衡点时,其运动轨迹和姿态如图 10 所示.观察车辆姿态图,车辆存在方向盘反打和后轮侧滑现象,也表明了保持在不稳定平衡点的车辆正在进行自主漂移.

通过对图 6 和图 7 的分析可知:无论在高速还是低速条件下,所提出控制方法均能够确保控制量约束,并维持车辆状态在期望的不稳定漂移平衡点,

使得车辆保持在漂移状态;且在湿滑道路这样车辆极易发生侧滑的极限工况下,所提出控制方法依然能够通过主动使得车辆进入漂移状态来保证行驶安全.尽管 LQR 可将车辆状态驱动至参考值,但是它不能处理任何约束,LQR 控制器计算出的控制量已大大超出了轮胎力约束.需要注意的是,虽然给 LQR 增加一个饱和环节可以强行令控制量满足约束,但是其控制器已失去了最优性能,闭环系统的稳定性和车辆漂移时的安全性均难以保证.

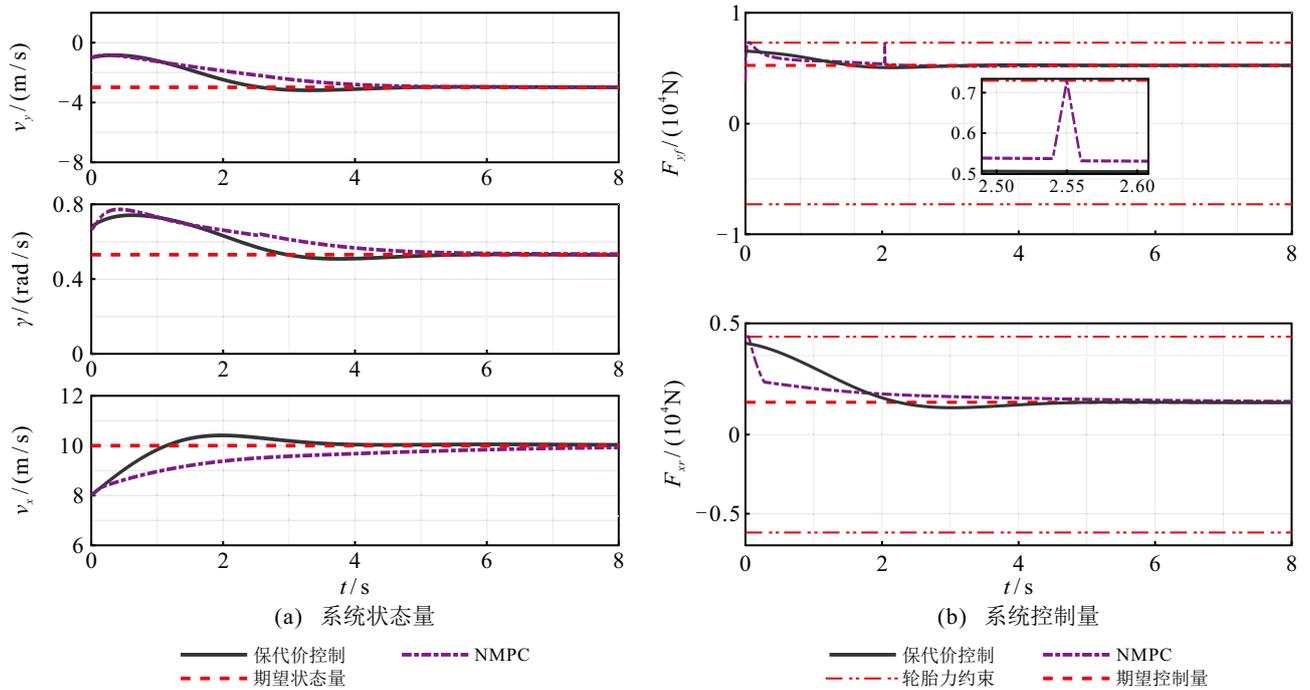


图9 仿真结果(实验4)

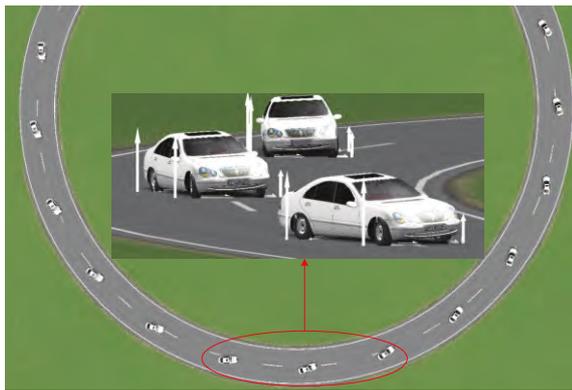


图10 漂移轨迹与姿态(实验3)

通过对图8和图9的分析可知:所提出算法和文献[15]提出的NMPC算法均能够使得车辆状态跟踪期望,并令系统控制量满足约束,但是在漂移平衡点附近,所提出算法的收敛速度明显快于NMPC算法.在实验3中,0.01s~0.04s之间系统控制量发生突变;在实验4中,2.55s时系统控制量也发生了突变,而所提出算法并没有发生控制量突变现象.此外,文献[15]提出的NMPC算法仍然需要在每个采样时刻在线求解优化问题,而所提出算法的反馈控制律是通过离线求解得到的,从而优化了计算资源,减小了系统运行时的负担.因此,针对动态和复杂环境下的控制需求,所提出方法在保证稳定性和安全性的同时,能够更好地应对约束条件,为车辆自主漂移提供了有效的解决方案.

## 5 结论

本文提出了一种车辆自主漂移改进保代价控制

方法.首先,引入了三自由度车辆模型,并在其中考虑了轮胎的非线性特性,利用系统模型计算期望的不稳定平衡点,并用相平面法分析了车辆漂移状态的动力学特性;然后,提出了能够处理控制量约束的改进保代价控制律的存在条件和构造方法,使用Koopman算子理论中的DMDc算法得到了近似线性模型,并利用该线性模型设计了一种改进保代价控制器,使得车辆保持稳态漂移状态,将车辆状态稳定在单一不稳定平衡点附近的同时,保证了系统满足控制量约束.

在未来的研究中,将通过EDMD算法获取系统的全局近似线性化模型,以提高模型的精度以及控制器的泛用性,并研究系统模型中存在较大建模误差时的改进保代价控制方法.

## 参考文献(References)

- [1] 李学鋈,汪怡平,苏楚奇,等.智能车辆路径跟踪控制方法[J].控制与决策,2024,39(1):143-150.  
(Li X Y, Wang Y P, Su C Q, et al. Research on the path tracking control method for intelligent vehicles[J]. Control and Decision, 2024, 39(1): 143-150.)
- [2] 杨宇航,王恒,周欣,等.基于事件触发的网络化无人车自适应路径跟踪控制[J].控制与决策,2024,39(9):3069-3078.  
(Yang Y H, Wang H, Zhou X, et al. Event-triggered finite-time adaptive path following control for connected-automated vehicle[J]. Control and Decision, 2024, 39(9): 3069-3078.)
- [3] 耿玺钧,崔立堃,熊高,等.子目标驱动DQN算法的无人车狭窄转弯环境导航[J].控制与决策,2024,39(11):3637-3644.

- (Geng X J, Cui L K, Xiong G, et al. Navigation in narrow turning environment of unmanned vehicle based on subgoal-driven DQN algorithm[J]. *Control and Decision*, 2024, 39(11): 3637-3644.)
- [4] 于树友, 刘艺, 王宇雷, 等. 线控转向系统主动信息安全控制[J]. *控制与决策*, 2019, 34(11): 2414-2420.  
(Yu S Y, Liu Y, Wang Y L, et al. Active information security oriented steering control of steer-by-wire vehicles[J]. *Control and Decision*, 2019, 34(11): 2414-2420.)
- [5] 王恒, 梁永裕, 李擎, 等. 基于观测器的无人车  $H_\infty$  预瞄控制器设计[J]. *控制与决策*, 2023, 38(6): 1737-1744.  
(Wang H, Liang Y Y, Li Q, et al. Design of observer-based  $H_\infty$  preview controller for autonomous guided vehicles[J]. *Control and Decision*, 2023, 38(6): 1737-1744.)
- [6] 王康, 李琼琼, 王子洋, 等. 考虑侧倾的无人车 NMPC 轨迹跟踪控制[J]. *控制与决策*, 2022, 37(10): 2535-2542.  
(Wang K, Li Q Q, Wang Z Y, et al. Trajectory tracking control for automated vehicle based on NMPC considering vehicle rolling motion[J]. *Control and Decision*, 2022, 37(10): 2535-2542.)
- [7] Leng B, Yu Y Z, Liu M, et al. Deep reinforcement learning-based drift parking control of automated vehicles[J]. *Science China Technological Sciences*, 2023, 66(4): 1152-1165.
- [8] Voser C, Hindiyeh R Y, Gerdes J C. Analysis and control of high sideslip manoeuvres[J]. *Vehicle System Dynamics*, 2010, 48(sup1): 317-336.
- [9] Hindiyeh R Y, Gerdes J C. Equilibrium analysis of drifting vehicles for control design[C]. *Dynamic Systems and Control Conference*. Hollywood, 2010: 181-188.
- [10] Hou X H, Zhang J Z, Ji Y, et al. Autonomous drift controller for distributed drive electric vehicle with input coupling and uncertain disturbance[J]. *ISA Transactions*, 2022, 120: 1-17.
- [11] Velenis E, Frazzoli E, Tsiotras P. Steady-state cornering equilibria and stabilisation for a vehicle during extreme operating conditions[J]. *International Journal of Vehicle Autonomous Systems*, 2010, 8(2/3/4): 217-241.
- [12] Bárdos Á, Domina Á, Tihanyi V, et al. Implementation and experimental evaluation of a MIMO drifting controller on a test vehicle[C]. *IEEE Intelligent Vehicles Symposium*. Las Vegas, 2020: 1472-1478.
- [13] Peterson M T, Goel T, Gerdes J C. Exploiting linear structure for precision control of highly nonlinear vehicle dynamics[J]. *IEEE Transactions on Intelligent Vehicles*, 2023, 8(2): 1852-1862.
- [14] Czibere S, Domina Á, Bárdos Á, et al. Model predictive controller design for vehicle motion control at handling limits in multiple equilibria on varying road surfaces[J]. *Energies*, 2021, 14(20): 6667.
- [15] Shi Z Q, Chen H, Yu S Y, et al. Nonlinear model predictive control for autonomous vehicle drifting[J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2025, 35(7): 2760-2779.
- [16] Cai P D, Mei X D, Tai L, et al. High-speed autonomous drifting with deep reinforcement learning[J]. *IEEE Robotics and Automation Letters*, 2020, 5(2): 1247-1254.
- [17] Yu L, Chu J. An LMI approach to guaranteed cost control of linear uncertain time-delay systems[J]. *Automatica*, 1999, 35(6): 1155-1159.
- [18] 张守武, 李擎, 王恒, 等. 非匹配不确定性影响下的无人车路径跟踪控制[J]. *控制与决策*, 2022, 37(1): 160-166.  
(Zhang S W, Li Q, Wang H, et al. Path following control for autonomous vehicles with mismatched uncertainties[J]. *Control and Decision*, 2022, 37(1): 160-166.)
- [19] Shen J J, Hong D. Optimal linearization via quadratic programming[J]. *IEEE Robotics and Automation Letters*, 2020, 5(3): 4572-4579.
- [20] Koopman B O. Hamiltonian systems and transformation in Hilbert space[J]. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 1931, 17(5): 315-318.
- [21] Proctor J L, Brunton S L, Kutz J N. Dynamic mode decomposition with control[J]. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 2016, 15(1): 142-161.
- [22] Proctory J L, Brunton S L, Kutz J N. Generalizing koopman theory to allow for inputs and control[J]. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 2018, 17(1): 909-930.
- [23] Williams M O, Kevrekidis I G, Rowley C W. A data-driven approximation of the koopman operator: Extending dynamic mode decomposition[J]. *Journal of Nonlinear Science*, 2015, 25: 1307-1346.
- [24] Narasingam A, Kwon J S I. Development of local dynamic mode decomposition with control: Application to model predictive control of hydraulic fracturing[J]. *Computers & Chemical Engineering*, 2017, 106: 501-511.
- [25] Korda M, Mezić I. Linear predictors for nonlinear dynamical systems: Koopman operator meets model predictive control[J]. *Automatica*, 2018, 93: 149-160.
- [26] 俞立, 徐建明. 具有控制约束的不确定离散系统最优保性能控制[J]. *系统工程与电子技术*, 2004, 26(10): 1453-1456.  
(Yu L, Xu J M. Optimal guaranteed cost control for uncertain discrete-timelike systems with input constraints[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2004, 26(10): 1453-1456.)
- [27] Yu L, Wang J C, Chu J. Guaranteed cost control of uncertain linear discrete-time systems[C]. *Proceedings of the 1997 American Control Conference*. Albuquerque, 1997: 3181-3184.
- [28] Abe M. *Vehicle handling dynamics: Theory and application*[M]. The 2nd edition. Amsterdam: Butterworth-Heinemann, 2015.

- [29] Pacejka H. Tire and vehicle dynamics[M]. Oxford: Elsevier, 2005.
- [30] Ono E, Hosoe S, Tuan H D, et al. Bifurcation in vehicle dynamics and robust front wheel steering control[J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 1998, 6(3): 412-420.
- [31] Sadri S, Wu C. Stability analysis of a nonlinear vehicle model in plane motion using the concept of Lyapunov exponents[J]. Vehicle System Dynamics, 2013, 51(6): 906-924.
- [32] Boyd S P, Vandenberghe L. Convex optimization[M]. New York : Cambridge, 2004.
- [33] 于树友, 冯阳阳, Kim Jung-Su, 等. 非线性预测控制终端约束集的优化[J]. 自动化学报, 2022, 48(1): 144-151. (Yu S Y, Feng Y Y, Kim J S, et al. Computation of terminal set for nonlinear model predictive control[J]. Acta Automatica Sinica, 2022, 48(1): 144-151.)
- [34] Mao R H, Meng T, Wang K, et al. Deep Koopman-operator-based model predictive control for free-floating space robots with disturbance observer[J]. Aerospace Science and Technology, 2024, 154: 109515.
- [35] Slotine J J E, Li W. Applied nonlinear control[M]. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1991.

### 作者简介

于树友 (1974-), 男, 教授, 博士, 博士生导师, 主要研究方向为预测控制、鲁棒控制、预测控制与鲁棒控制在机电系统中的应用, E-mail: shuyou@jlu.edu.cn;

张世硕 (2000-), 男, 硕士生, 主要研究方向为车辆稳定性控制、车辆漂移控制, E-mail: sszhang22@mails.jlu.edu.cn;

刘泽澎 (2001-), 男, 硕士生, 主要研究方向为数据驱动建模、车辆队列控制, E-mail: liuzp23@mails.jlu.edu.cn;

林宝君 (1974-), 男, 副教授, 博士, 主要研究方向为模数控系统、PLC、电机调速及其在机电系统中的应用, E-mail: linbj@jlu.edu.cn;

陈虹 (1963-), 女, 教授, 博士, 主要研究方向为预测控制、非线性控制、汽车控制, E-mail: chenh@jlu.edu.cn.