

# 一种基于 LMI 的非线性模型预测控制终端域优化方法

于树友<sup>1</sup> 陈虹<sup>1</sup> 张鹏<sup>1</sup> 李学军<sup>1,2</sup>

**摘 要** 对于具有约束的非线性系统, 提出了一种模型预测控制 (Model predictive control, MPC) 的终端域优化方法. 基于线性矩阵不等式 (Linear matrix inequality, LMI) 优化和非线性系统的范数有界线性微分包含 (Linear differential inclusion, LDI), 给出了求解非线性 MPC 终端代价函数和局部稳定控制器的一种方法, 在此基础上可方便地得到非线性模型预测控制终端域. 一个具体的数值算例验证了算法的有效性.

**关键词** 模型预测控制, 终端域, 约束非线性系统, 线性微分包含, 线性矩阵不等式

**中图分类号** TP273.13

## An LMI Optimization Approach for Enlarging the Terminal Region of MPC for Nonlinear Systems

YU Shu-You<sup>1</sup> CHEN Hong<sup>1</sup> ZHANG Peng<sup>1</sup> LI Xue-Jun<sup>1,2</sup>

**Abstract** The paper presents a method for solving the terminal region of model predictive control (MPC) for nonlinear systems with constraints. Based on linear matrix inequality (LMI) optimization and norm-bounded linear differential inclusion (LDI) of nonlinear system, we develop an approach to offline choose the terminal cost and fictitious local stabilizing control law so as to gain the terminal region. A numerical example is given to illustrate the effectiveness of the proposed results.

**Key words** Model predictive control (MPC), terminal region, constrained nonlinear systems, linear differential inclusion (LDI), linear matrix inequality (LMI)

模型预测控制 (Model predictive control, MPC), 又称为滚动时域控制 (Moving horizon control) 或后退时域控制 (Receding horizon control), 是近年来被广泛讨论的一种控制策略. 模型预测控制的机理可以描述为: 在每一采样时刻, 根据当前量测信息, 在线求解一个有限时域开环最优控制问题, 并将得到的控制序列的第一个元素作用到被控对象上, 并重复上述过程. 对于有约束的非线性系统, 由于无法通过直接求取系统的 Hamilton-Jacobi-Bellman 方程获得其精确解析解, 使得这种依赖实时数值优化的方法获得了广泛的关注. 目前已初步建立了分析模型预测控制稳定性、鲁棒性和最优性的理论框架<sup>[1-3]</sup>, 并且大量应用于化工、冶金制造等过程控制领域<sup>[4]</sup>.

为保证非线性 MPC 的稳定性, 最直观的方法是采用无限时域<sup>[5]</sup>, 但这使数值寻优几乎不可能, 即

使采用工程意义上的无限即“足够大”时域, 也会使 MPC 算法因实时性差而无法应用. 文献 [6] 在开环优化问题中加入等式约束条件  $\mathbf{x}(t+T) = \mathbf{0}$ , 强制系统的终端状态回到平衡点. 采用终端等式约束的缺点是为满足终端等式约束条件要求在非线性规划中无限次迭代计算, 这将大大增加在线优化的计算量, 并且这样的约束将使非线性优化问题只在很小的范围内有可行解. 文献 [7] 用终端不等式约束代替终端等式约束, 提出了在系统终端域之外由 MPC 控制, 在终端域之内则由状态反馈控制的双模变时域 MPC 方法. 双模变时域 MPC 是一种切换控制系统, 并没有解决预测控制的稳定性问题. 文献 [8] 提出的准无限时域 MPC 通过在非线性优化问题中引入满足一定条件的终端代价和终端不等式约束 (终端域), 解决了非线性 MPC 的稳定性问题<sup>[1]</sup>. 由于准无限时域 MPC 只要求在每一采样时刻开环优化问题存在可行解, 不依赖于最优解, 并且控制性能更接近无限时域的最优化问题, 因而相应的设计方法成为保证 MPC 稳定的主要方法<sup>[1]</sup>.

终端代价函数、终端域和局部控制器构成了准无限时域非线性预测控制方法中优化问题的基本要素: 终端代价函数满足 Hamilton-Jacobi-Bellman 不等式; 终端域是终端代价函数的一个值域且使系统满足时域约束和不变性; 局部控制器只是用来计算终端代价函数和终端域, 并没有直接作用于系统.

收稿日期 2007-03-12 收修稿日期 2007-09-02

Received March 12, 2007; in revised form September 2, 2007

教育部新世纪优秀人才支持计划 (2004) 和国家杰出青年科学基金 (60725311) 资助

Supported by Program for New Century Excellent Talents in University (2004) and National Science Fund of China for Distinguished Young Scholars (60725311)

1. 吉林大学控制科学与工程系 长春 130025 2. 长春大学电子信息工程学院 长春 130022

1. Department of Control Science and Engineering, Jilin University, Changchun 130025 2. Institute of Electric Information Engineering, Changchun University, Changchun 130022

DOI: 10.3724/SP.J.1004.2008.00798

准无限时域 MPC 要求离线设计终端代价函数、终端域和终端控制器。终端域的选取与终端代价函数和终端控制器的具体实现形式有关, 是决定准无限时域 MPC 在线计算负担的关键。对于约束线性系统, De Doná<sup>[9]</sup> 给出了一种扩展终端域的方法; 利用非线性系统的局部 Lipschitz 条件, Chen<sup>[8]</sup> 给出了一种非线性系统终端域优化算法; 通过选择预测时域大于控制时域, Magni<sup>[10]</sup> 给出了一种扩展非线性系统终端域的算法。对于非线性系统, 利用局部的多面体线性微分包含 (Polytope linear differential inclusion, PLDI), Chen<sup>[11]</sup> 和 Canno<sup>[12]</sup> 分别给出了椭球体和多面体型终端域的求取方法。Ong<sup>[13]</sup> 利用支持向量机优化, Canno<sup>[14]</sup> 利用非线性系统的局部不变性原理分别讨论了非线性系统扩展终端域的方法。

本文通过非线性系统的范数有界的线性微分包含 (Norm-bounded linear differential inclusion) 描述, 基于线性矩阵不等式优化, 提出了一种新的终端域优化算法。与 Chen<sup>[11]</sup> 的方法相比, 它能够用较少的线性矩阵不等式约束来描述问题。数值仿真表明, 用该方法求得的终端域远大于用 Lipschitz 法求得终端域。

## 1 基于 LMI 的非线性 MPC 终端域优化方法

### 1.1 准无限时域非线性 MPC

考虑非线性时不变系统

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad t \geq t_0 \quad (1)$$

其中  $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^n$  是系统的状态,  $\mathbf{u}(t) \in \mathbf{R}^m$  是控制输入, 假设系统的状态完全可测, 系统的输入和状态约束分别为

$$\mathbf{u}(t) \in \mathcal{U}, \quad \forall t \geq t_0 \quad (2a)$$

$$\mathbf{x}(t) \in \mathcal{X}, \quad \forall t \geq t_0 \quad (2b)$$

假设系统 (1) 满足下面的条件<sup>[1, 8]</sup>:

**A1.** 非线性函数  $\mathbf{f} : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^n$  是连续的,  $\mathbf{f}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0} \in \mathbf{R}^n$ ,  $\mathbf{f}$  关于  $\mathbf{x}$  局部 Lipschitz 连续;

**A2.** 对任意的初始状态  $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{X}$ , 系统 (1) 有唯一解, 并且其解是分段右连续的, 同时满足约束  $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ ;

**A3.**  $\mathcal{U} \subseteq \mathbf{R}^m$  是紧的、凸的,  $\mathcal{X} \subseteq \mathbf{R}^n$  是连通的, 集合  $\mathcal{X} \times \mathcal{U}$  包含点  $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ 。

设在时刻  $t$  系统的状态为  $\mathbf{x}(t)$ , 准无限时域非线

性预测控制的优化问题可描述为<sup>[8, 15]</sup>

$$\min_{\bar{\mathbf{u}}(\cdot)} J(\mathbf{x}(t), \bar{\mathbf{u}}(\cdot)) \quad (3a)$$

$$J(\mathbf{x}(t), \bar{\mathbf{u}}(\tau, \mathbf{x}(t))) = V(\mathbf{x}(t + T_p)) + \int_t^{t+T_p} l(\bar{\mathbf{x}}(t + \tau; \mathbf{x}(t)), \bar{\mathbf{u}}(t + \tau; \mathbf{x}(t))) d\tau \quad (3b)$$

同时满足

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}} = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}), \quad \bar{\mathbf{x}}(t; \mathbf{x}(t), t) = \mathbf{x}(t) \quad (4a)$$

$$\bar{\mathbf{u}}(\tau) \in \mathcal{U}, \quad \tau \in [t, t + T_p] \quad (4b)$$

$$\bar{\mathbf{x}}(\tau; \mathbf{x}(t), t) \in \mathcal{X}, \quad \tau \in [t, t + T_p] \quad (4c)$$

$$\bar{\mathbf{x}}(t + T_p; \bar{\mathbf{x}}(t), t) \in \Omega \quad (4d)$$

其中  $T_p$  是有限的预测时域;  $\bar{\mathbf{x}}(\cdot; \mathbf{x}(t), t)$  是在控制  $\bar{\mathbf{u}}(\cdot)$  的作用下, 系统起始于  $\mathbf{x}(t)$  的预测状态轨迹;  $l(\cdot, \cdot)$  是阶段代价 (Cost stage) 函数, 满足下面的条件:

**A4.**  $l(\mathbf{x}, \mathbf{u}) : \mathbf{R}^n \times \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{R}$  关于自变量  $\mathbf{x}$  和  $\mathbf{u}$  均是连续的, 并且满足  $l(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = 0$  和  $l(\mathbf{x}, \mathbf{u}) > 0$ ,  $\forall (\mathbf{x}, \mathbf{u}) \in \mathbf{R}^n \times \mathcal{U} \setminus \{\mathbf{0}, \mathbf{0}\}$ 。

另外,  $V(\cdot)$  是正定的终端代价函数,  $\Omega$  是平衡点的一个邻域

$$\Omega(\alpha) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n | V(\mathbf{x}) \leq \alpha, \alpha > 0\} \quad (5)$$

**定义 1.** 假设存在一个连续的局部控制器  $\mathbf{u} = k(\mathbf{x})$  使得下述条件成立:

**B1.**  $\Omega \subseteq \mathcal{X}$ ;

**B2.** 对于所有的  $\mathbf{x} \in \Omega$ , 有  $k(\mathbf{x}) \in \mathcal{U}$ ;

**B3.** 对于所有的  $\mathbf{x} \in \Omega$ , 函数  $V(\mathbf{x})$  满足 Hamilton-Jacobi-Bellman 不等式

$$\frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, k(\mathbf{x})) + l(\mathbf{x}, k(\mathbf{x})) \leq 0 \quad (6)$$

则称  $\Omega(\alpha)$  是非线性系统 (1) 考虑性能指标 (3b) 和终端控制器  $\mathbf{u} = k(\mathbf{x})$  的终端域。

定义 1 的叙述表明在终端域内, 局部控制器  $\mathbf{u} = k(\mathbf{x})$  使得控制系统满足约束 (2) 且是正不变的<sup>[16]</sup>, 即系统始于  $\Omega$  的所有轨迹将保持在  $\Omega$  中。

有了这些条件, 就可以得出下面的可行性和稳定性结论。

**定理 1**<sup>[15]</sup>. 假设

1) 条件 A1~A4 成立;

2) 对于非线性系统 (1), 存在满足条件 B1~B3 的终端代价函数  $V(\mathbf{x})$  和终端域  $\Omega$ ;

3) 在  $t = 0$  时刻, 优化控制问题 (3) 存在可行解, 则对充分小的采样周期  $\delta > 0$ ,

a) 在每个采样时刻  $t > 0$ , 优化控制问题 (3) 都存在可行解;

b) 闭环系统是名义渐近稳定的<sup>1</sup>.  
证明. 详细的证明参阅文献 [15]. □  
本文中我们考虑如下形式的约束

$$-\hat{u}_i \leq u_i(t) \leq \hat{u}_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad t \geq t_0 \quad (7a)$$
$$-\hat{x}_j \leq x_j(t) \leq \hat{x}_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad t \geq t_0 \quad (7b)$$

其中  $u_i(\cdot)$  是控制输入向量的第  $i$  个元素,  $x_j(\cdot)$  是系统的第  $j$  个状态分量,  $\hat{u}_i$  和  $\hat{x}_j$  是已知的正常数.  
选择二次型阶段代价

$$l(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{x}^T Q \mathbf{x} + \mathbf{u}^T R \mathbf{u} \quad (8)$$

其中  $Q \geq 0$  和  $R > 0$ .

1.2 范数有界的线性微分包含

我们首先介绍非线性系统 (1) 的范数有界的线性微分包含, 在此基础上讨论非线性 MPC 终端域和终端代价的求解方法. 这样虽然增加了设计的保守性, 但是可以方便地利用现有的凸优化方法进行设计. 假设

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \in (A + \Delta A)\mathbf{x}(t) + (B + \Delta B)\mathbf{u}(t) \quad (9)$$

其中  $A, B$  是适当维数的常数矩阵,  $\Delta A$  和  $\Delta B$  是适当维数的不确定矩阵函数, 并且满足

$$[\Delta A \quad \Delta B] = D F(t) [E_1 \quad E_2]$$

上式中  $D, E_1$  和  $E_2$  是已知的常数矩阵,  $F(t) \in \mathcal{F}$  是一个未知矩阵, 它可以是时变的

$$\mathcal{F} = \{F(t) | F^T(t)F(t) \leq I\} \quad (10)$$

式 (9) 表明

$$(A + \Delta A)\mathbf{x}(t) + (B + \Delta B)\mathbf{u}(t) \quad (11)$$

是  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$  的一个范数有界的线性微分包含, 即  $\dot{\mathbf{x}}(t) \in (A + \Delta A)\mathbf{x}(t) + (B + \Delta B)\mathbf{u}(t)$ .

注 1. 记  $\Omega_N = \{\mathbf{x} | \dot{\mathbf{x}}(t) \in (A + D F(t) E_1) \cdot \mathbf{x}(t) + (B + D F(t) E_2)\mathbf{u}(t), F^T(t)F(t) \leq I\}$ , 则  $\Omega_N$  是凸的<sup>[16]</sup>. 这允许我们在后文中采用线性矩阵不等式 (凸域上的凸优化方法) 求解系统的终端域.

1.3 基于范数有界线性微分包含的终端不变域

定理 2. 假设非线性系统 (1) 的一个范数有界线性微分包含为式 (11). 如果存在标量  $\epsilon > 0$ , 矩阵  $W$  和对称正定矩阵  $X$ , 使得矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} \Pi & (E_1 X + E_2 W)^T & X & W^T \\ * & -\epsilon I & 0 & 0 \\ * & * & -Q^{-1} & 0 \\ * & * & * & -R^{-1} \end{bmatrix} < 0 \quad (12)$$

<sup>1</sup> 名义渐近稳定是指在没有外部扰动和模型摄动的条件下, 系统是 Lyapunov 渐近稳定的<sup>[17]</sup>.

有可行解  $(\epsilon, W, X)$ , 其中  $\Pi = AX + BW + (AX + BW)^T + \epsilon DD^T$ ,  $*$  表示沿对角线对称位置的块矩阵的转置. 记  $P = X^{-1}$ ,  $K = WX^{-1}$ , 则在考虑终端控制器  $\mathbf{u} = K\mathbf{x}$  的情况下, 对于任意  $\mathbf{x} \in \Omega(\alpha, P) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n | \mathbf{x}^T P \mathbf{x} \leq \alpha, \alpha > 0\}$ ,  $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T P \mathbf{x}$  满足 Hamilton-Jacobi-Bellman 不等式 (6).

证明. 详细的证明参阅文献 [18]. □

定理 2 给出了  $\mathbf{x} \in \Omega(\alpha, P)$  时,  $V(\mathbf{x})$  满足 Hamilton-Jacobi-Bellman 不等式的条件, 下面的两个定理分别给出了满足输入约束 (7a) 和状态约束 (7b) 的条件.

定理 3. 如果矩阵  $W$  和对称矩阵  $X$  进一步满足矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha} \hat{u}_i^2 & \mathbf{e}_i^T W \\ * & X \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (13)$$

其中  $\mathbf{e}_i$  为引入的输入空间  $\mathbf{R}^m$  上的第  $i$  个标准向量基, 则对于任意的  $\mathbf{x} \in \Omega(\alpha, P)$ ,  $\mathbf{u} = WX^{-1}\mathbf{x}$  满足输入约束 (7a).

证明. 终端控制器满足约束  $-\hat{u}_i \leq u_i(t) \leq \hat{u}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , 意味着应有  $u_i^2(t) \leq \hat{u}_i^2$ .

由于  $u_i(t) = \mathbf{e}_i^T K \mathbf{x}(t)$ , 得

$$\mathbf{x}^T(t) K^T \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^T K \mathbf{x}(t) \leq \hat{u}_i^2 \quad (14)$$

式 (14) 成立的一个充分条件是

$$\mathbf{x}^T(t) \frac{K^T \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^T K}{\hat{u}_i^2} \mathbf{x}(t) \leq \frac{\mathbf{x}(t)^T P \mathbf{x}(t)}{\alpha} \quad (15)$$

考虑到  $\mathbf{x}(t)$  的任意性, 式 (15) 成立要求

$$\frac{P}{\alpha} - \frac{K^T \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^T K}{\hat{u}_i^2} \geq 0$$

根据 Schur 补引理有

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha} \hat{u}_i^2 & \mathbf{e}_i^T K \\ * & P \end{bmatrix} \geq 0 \quad (16)$$

用  $\text{diag}\{I, X\}$  对上式做同余变换, 得结论. □

定理 4. 如果对称矩阵  $X$  进一步满足矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha} \hat{x}_j^2 & \mathbf{e}_j^T X \\ * & X \end{bmatrix} \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (17)$$

其中  $\mathbf{e}_j$  为引入的状态空间  $\mathbf{R}^n$  上的第  $j$  个标准向量基, 则  $\Omega(\alpha, P)$  内的所有元素  $\mathbf{x}$  满足状态约束 (7b).

证明. 证明过程与定理 3 类似, 故省略. □

在多目标控制的框架下综合考虑定理 2~4, 我们可以得到下面的结论:

假设非线性系统 (1) 的线性微分包含可以表示为式 (11), 设存在对称正定矩阵  $X \in \mathbf{R}^{n \times n}$  和矩阵  $W \in \mathbf{R}^{m \times n}$ , 标量  $\alpha > 0$  和  $\epsilon > 0$ , 满足线性矩阵不等式组 (12), (13) 和 (17), 记  $P = X^{-1}$ ,  $K = WX^{-1}$ , 则椭圆域  $\Omega(\alpha, P) = \{x \in \mathbf{R}^n | x^T Px \leq \alpha, \alpha > 0\}$  是系统的终端不变域, 相应的终端控制为  $u = Kx$ .

1.4 终端不变域的优化方法

椭圆域  $\Omega(\alpha, P) = \{x \in \mathbf{R}^n | x^T Px \leq \alpha, \alpha > 0\}$  的容量 (椭圆域包含点的个数) 与  $\det(\alpha X)$  成正比<sup>[16]</sup>,  $X = P^{-1}$ . 目标函数  $\det(\cdot)$  不是变量的凸函数, 但是可以通过相应的单调变换将它转化为凸函数. 文献 [19] 采用对数变换法, 文献 [20] 采用特征值的几何均值法分别将上述求取对称矩阵的最大行列式的非凸优化问题转化为凸优化问题. 在这里, 本文采用文献 [20] 介绍的方法.

考虑如下的优化问题

$$\max_{\alpha, \epsilon, X, W} \det(\alpha X)^{\frac{1}{m}} \tag{18}$$

$$\text{s.t. } \alpha > 0, \epsilon > 0, X > 0, \text{ (12), (13) 和 (17)}$$

其中,  $m$  为对称矩阵  $X$  的维数. 优化问题 (18) 中由于存在变量  $\alpha$  和  $X$  的乘积项  $\alpha X$  因而仍是一个非凸的非线性优化问题, 下面通过变量代换将它转化为凸优化问题.

考虑到  $\alpha > 0$ , 记

$$X_0 = \alpha X, \quad W_0 = \alpha W, \quad \epsilon_0 = \alpha \epsilon \tag{19}$$

将约束条件 (12), (13) 和 (17) 分别改写成

$$\begin{bmatrix} \Pi_0 & (E_1 X_0 + E_2 W_0)^T & X_0 & W_0^T \\ * & -\epsilon_0 I & 0 & 0 \\ * & * & -\alpha Q^{-1} & 0 \\ * & * & * & -\alpha R^{-1} \end{bmatrix} < 0 \tag{20}$$

和

$$\begin{bmatrix} \hat{u}_i^2 & e_i^T W_0 \\ * & X_0 \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \tag{21}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_i^2 & e_j^T X_0 \\ * & X_0 \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \tag{22}$$

式 (20) 中  $\Pi_0 = AX_0 + BW_0 + (AX_0 + BW_0)^T + \epsilon_0 DD^T$ ,  $*$  表示沿对角线对称位置的块矩阵的转置.

综上, 最大化椭圆域  $\Omega = \{x \in \mathbf{R}^n | x^T Px \leq \alpha\}$  的容量问题可以表示为

$$\min_{\alpha, \epsilon_0, X_0, W_0} -\det(X_0)^{\frac{1}{m}} \tag{23}$$

$$\text{s.t. (20) } \sim \text{(22), } \alpha > 0, \epsilon_0 > 0, X_0 > 0$$

问题 (23) 是一个凸优化问题<sup>[20]</sup>. 通过求解凸优化问题 (23) 可以得到参量  $\alpha, \epsilon_0, X_0, W_0$ , 在此基础上利用  $X_0 = \alpha X$ ,  $W_0 = \alpha W$  和  $P = X^{-1}$ ,  $K = WP$  得到终端权矩阵  $P$  和终端控制增益  $K$ .

按照问题 (23) 求取系统的最大椭圆域, 所求得的终端代价函数  $P$  的范数通常较大. 较大的终端代价函数可能导致优化问题 (3) 中的控制动作  $u$  过小, 从而影响系统的动态性能. 由于有  $x^T Px \leq \alpha$ , 我们可以考虑通过限制标量  $\alpha$  的最大值来限制  $P$  的范数, 达到系统的性能和较大的终端域 (较小的计算负担) 之间均衡的目的.  $\alpha$  的最大值可以参考阶段代价  $l$  中的  $Q$  值来具体设定 (例如可以选择  $\alpha \leq 10\|Q\|$ ), 这一点将在下文中通过一个具体的算例说明.

2 一个数值算例

考虑非线性系统<sup>[8]</sup>

$$\dot{x}_1 = x_2 + u(\mu + (1 - \mu)x_1) \tag{24a}$$

$$\dot{x}_2 = x_1 + u(\mu - 4(1 - \mu)x_2) \tag{24b}$$

对于参数  $\mu \in (0, 1)$ , 这个非线性系统是不稳定的, 在平衡点  $(0, 0)$  Jacobi 线性化得到的线性系统  $\dot{x} = Ax + Bu$  是可稳但不可控的, 并且系统的非线性特性随着  $\mu$  值的减小而增大<sup>[8]</sup>.

输入  $u$  满足约束

$$-2 \leq u \leq 2 \tag{25}$$

显然约束系统 (24) 满足假设条件 A1~A4. 选择二次型函数  $l(x, u) = x^T Qx + u^T Ru$  作为阶段代价函数, 其中权矩阵  $Q$  和  $R$  分别选为

$$Q = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad R = 1 \tag{26}$$

2.1  $\mu = 0.8$  的情况

当  $\mu = 0.8$  时, 系统 (24) 的一个微分包含 (9) 的矩阵参数为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.8 \end{bmatrix}$$
$$\Delta A = \begin{bmatrix} 0.2u & 0 \\ 0 & -0.8u \end{bmatrix}, \quad \Delta B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

对于固定的  $u$ , 显然有  $\dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A})\mathbf{x}(t) + (\mathbf{B} + \Delta\mathbf{B})u(t)$ ; 将  $u$  视为变化的参数, 则显然  $\dot{\mathbf{x}}(t) \in (\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A})\mathbf{x}(t) + (\mathbf{B} + \Delta\mathbf{B})u(t)$ . 考虑到  $-2 \leq u \leq 2$ , 相应的范数有界的线性微分包含 (11) 的参数矩阵可以选为

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_1 = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 \\ 0 & -1.6 \end{bmatrix}$$
$$E_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad F_0 = \begin{bmatrix} 0.5u & 0 \\ 0 & 0.5u \end{bmatrix}$$

式中  $F_0^T F_0 \leq I$  满足条件 (10).

分别采用文献 [8] 和本文介绍的方法求取系统的终端不变域, 相应的系统终端域如图 1 所示. 图 1 中虚线对应的椭圆是采用文献 [8] 中的 Lipschitz 法得到的, 实线对应的椭圆是采用本文方法得到的. 从图中可以看出采用本文方法扩大了系统的终端域.

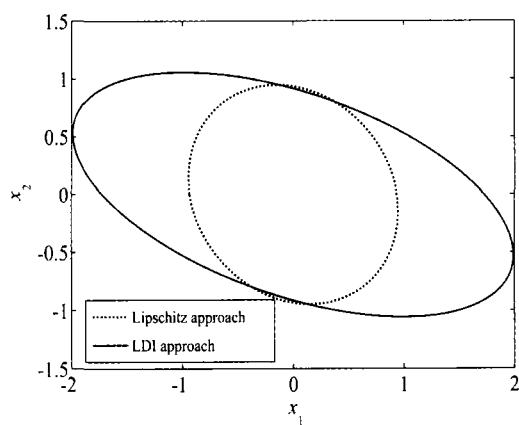


图 1 终端域的比较 ( $\mu = 0.8$ )

Fig. 1 Comparison of terminal regions ( $\mu = 0.8$ )

在本例中, 应用本文方法得到  $\alpha = 7.7497 \times 10^4$ ,  $P = 10^4 \times \begin{bmatrix} 2.6102 & 2.4615 \\ 2.4615 & 9.2509 \end{bmatrix}$ . 考虑到式 (3) 中  $Q, R$  的取值 (26), 显然  $P$  的范数值过大, 这可能会影响到系统的动态性能. 为此, 在问题 (23) 中加入约束  $0 < \alpha \leq 10$ , 相应的系统终端域如图 2 所示. 图中虚线对应的椭圆是  $0 < \alpha \leq 10$  的情况, 相应的最优值  $\alpha = 10$ ,  $P = \begin{bmatrix} 4.2371 & 3.5383 \\ 3.5383 & 14.6328 \end{bmatrix}$ .

图 3 给出了在系统初始状态为  $(-3.0, 2.0)$  时, 分别利用 Lipschitz 条件法和线性微分包含法 ( $\alpha = 10$ ) 求得的终端条件的准无限时域非线性 MPC 动态过程的比较. 对后者, 我们选择控制时域  $N_c$  和预测时域  $N_p$  均等于 10. 对于利用 Lipschitz 条件法求得的终端条件, 若选择  $N_c = N_p = 10$ , 在  $k = 0$  时优化问题无解, 因而我们选择  $N_c = N_p = 15$ . 在数值求解开环优化问题时, 我们选择采样时间  $\delta = 0.1$ .

从图 3 中我们可以看到线性微分包含法 ( $\alpha = 10$ ) 在扩大系统终端域的情况下并没有使系统的动态特性明显降低. 同时由于采用线性微分包含法 ( $\alpha = 10$ ) 时控制时域和预测时域可以选得较小, 因而可以降低非线性 MPC 在线优化的计算量.

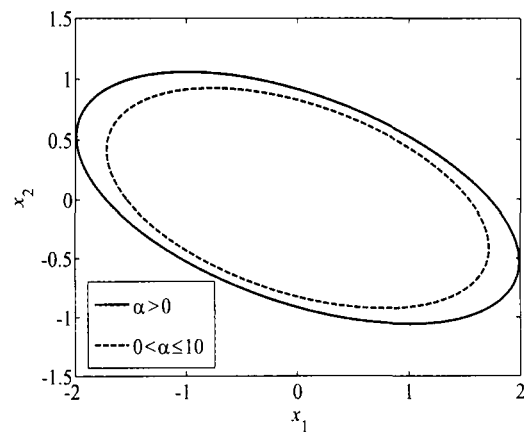


图 2  $0 < \alpha \leq 10$  和  $\alpha > 0$  两种情况终端域比较 ( $\mu = 0.8$ )

Fig. 2 Terminal regions by limiting the terminal weighting matrix ( $\mu = 0.8$ )

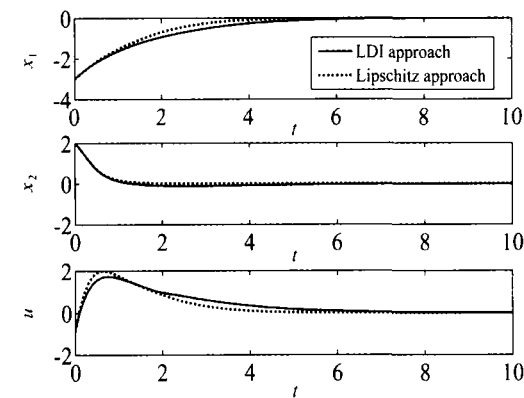


图 3 范数有界的线性微分包含法和 Lipschitz 条件法动态过程的比较 ( $\mu = 0.8$ )

Fig. 3 Comparison of dynamic responses ( $\mu = 0.8$ )

从图 2 和图 3 中可以看出, 在线性微分包含法中, 通过限制  $\alpha$  的幅值, 可以达到均衡考虑终端域的大小和系统的动态性能的目的.

2.2  $\mu = 0.5$  的情况

当  $\mu = 0.5$  时, 系统 (24) 的一个微分包含 (9) 的矩阵参数为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$
$$\Delta A = \begin{bmatrix} 0.425u & 0 \\ 0 & -2u \end{bmatrix}, \quad \Delta B = \begin{bmatrix} 0.075u \\ 0 \end{bmatrix}$$

与  $\mu = 0.8$  的情况相似, 选择一组范数有界的线性微

分包含 (11) 的参数矩阵为

$$D = \begin{bmatrix} 0.85 & 0 \\ 0 & 0.4 \end{bmatrix}, \quad E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -10 \end{bmatrix}$$

$$E_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 17 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad F_0 = \begin{bmatrix} 0.5u & 0 \\ 0 & 0.5u \end{bmatrix}$$

$F_0^T F_0 \leq I$  满足条件 (10).

我们将求得的椭圆域与文献 [8] 介绍的方法比较, 相应的结果如图 4 所示. 从图 4 中可以看出椭圆域有所增大.

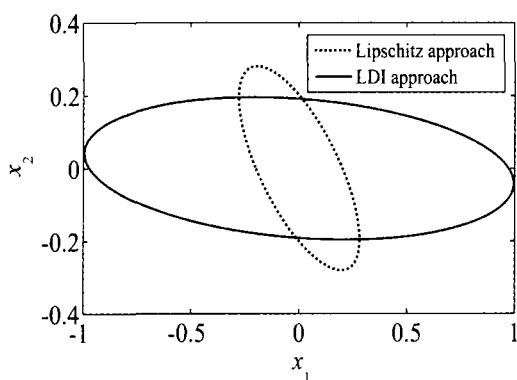


图 4 终端域的比较 ( $\mu = 0.5$ )

Fig. 4 Comparison of terminal regions ( $\mu = 0.5$ )

### 2.3 $\mu = 0.2$ 的情况

当  $\mu = 0.2$  时, 系统 (24) 的一个微分包含 (9) 的矩阵参数为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.2 \end{bmatrix}$$

$$\Delta A = \begin{bmatrix} 0.72u & 0 \\ 0 & -3.2u \end{bmatrix}, \quad \Delta B = \begin{bmatrix} 0.08u \\ 0 \end{bmatrix}$$

与  $\mu = 0.8$  的情况相似, 选择一组范数有界的线性微分包含 (11) 的参数矩阵为

$$D = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}, \quad E_1 = \begin{bmatrix} 1.8 & 0 \\ 0 & -32 \end{bmatrix}$$

$$E_2 = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad F_0 = \begin{bmatrix} 0.5u & 0 \\ 0 & 0.5u \end{bmatrix}$$

$F_0^T F_0 \leq I$  满足条件 (10).

我们将求得椭圆域与文献 [8] 介绍的方法比较, 相应的结果如图 5 所示. 从图 5 中可以看出椭圆域有所增大.

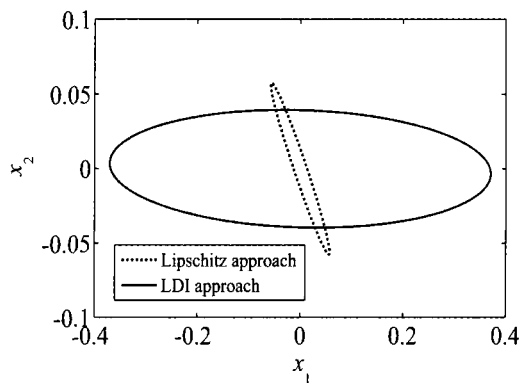


图 5 终端域的比较 ( $\mu = 0.2$ )

Fig. 5 Comparison of terminal regions ( $\mu = 0.2$ )

## 3 结论

为了保证非线性 MPC 的稳定性, 通常需要在 MPC 优化问题中加入终端约束条件和终端代价函数并保证终端约束集是一个正不变集, 相应的终端代价函数是系统的局部控制 Lyapunov 函数. 在线性矩阵不等式优化的基础上, 本文给出了求解其终端代价函数和局部稳定控制器的一种方法, 在此基础上可方便地得到非线性 MPC 的终端域. 与 Chen<sup>[11]</sup>介绍的方法相比, 它能够用较少的线性矩阵不等式约束描述问题. 为验证算法的有效性, 本文提供了一个具体的数值算例, 并进一步讨论了均衡考虑终端域的容量和控制系统动态性能的问题.

## References

- 1 Mayne D Q, Rawlings J B, Rao C V, Sokaert P O M. Constrained model predictive control: stability and optimality. *Automatica*, 2000, **36**(6): 789–814
- 2 Chen Hong, Liu Zhi-Yuan, Xie Xiao-Hua. Status and problem of nonlinear model predictive control. *Control and Decision*, 2001, **16**(4): 385–391  
(陈虹, 刘志远, 解晓华. 非线性模型预测控制的现状与问题. *控制与决策*, 2001, **16**(4): 385–391)
- 3 Xi Yu-Geng, Geng Xiao-Jun, Chen Hong. The new evolution of performance research in model predictive control. *Control Theory and Applications*, 2000, **17**(4): 469–475  
(席裕庚, 耿晓军, 陈虹. 预测控制性能研究的新进展. *控制理论与应用*, 2000, **17**(4): 469–475)
- 4 Qin S J, Badgwell T A. A survey of industrial model predictive control technology. *Control Engineering Practice*, 2003, **11**(7): 733–764
- 5 Bitmead R, Gevers M, Wertz V. *Adaptive Optimal Control — The Thinking Man's GPC*. New York: Prentice Hall, 1990
- 6 Mayne D Q, Michalska H. Receding horizon control of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1990, **35**(7): 814–824
- 7 Michalska H, Mayne D Q. Robust receding horizon control of constrained nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1993, **38**(11): 1623–1633

- 8 Chen H, Allgower F. A quasi-infinite horizon nonlinear model predictive control scheme with guaranteed stability. *Automatica*, 1998, **34**(10): 1205–1217
- 9 De Doná J A, Seron M M, Goodwin G C. Enlarged terminal sets guaranteeing stability of receding horizon control. *Systems and Control Letters*, 2002, **47**(1): 57–63
- 10 Magni L, Nicolao G D, Magnani L, Scattolini R. A stabilizing model-based predictive control algorithm for nonlinear systems. *Automatica*, 2001, **37**(9): 1351–1362
- 11 Chen W H, O'Reilly J, Ballance D J. On the terminal region of model predictive control for non-linear systems with input/state constraints. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 2003, **17**(2): 195–208
- 12 Cannon M, Deshmukh V, Kouvaritakis B. Nonlinear model predictive control with polytopic invariant sets. *Automatica*, 2003, **39**(8): 1487–1494
- 13 Ong C J, Sui D, Gilbert E G. Enlarging the terminal region of nonlinear model predictive control using the supporting vector machine method. *Automatica*, 2006, **42**(6): 1011–1016
- 14 Cannon M, Kouvaritakis B, Deshmukh V. Enlargement of polytopic terminal region in NMPC by interpolation and partial invariance. *Automatica*, 2004, **40**(2): 311–317
- 15 Chen H. *Stability and Robustness Considerations in Non-linear Model Predictive Control*. Dusseldorf: VDI Verlag, 1997
- 16 Boyd S, Ghaoui L E, Feron E, Balakishnan V. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. Philadelphia: Society for Industrial Mathematics, 1994
- 17 Zhou K, Doyle J C, Glover K. *Robust and Optimal Control*. New Jersey: Prentice Hall, 1996
- 18 Yu L, Han Q L, Sun M X. Optimal guaranteed cost control of linear uncertain systems with input constraints. *International Journal of Control, Automation, and Systems*, 2005, **3**(3): 397–402
- 19 Vandenberghe L, Boyd S, Wu S P. Determinant maximization with linear matrix inequality constraints. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 1998, **19**(2): 499–533
- 20 Nesterov Y E, Nemirovsky A. *Interior-Point Polynomial Methods in Convex Programming*. Philadelphia: SIAM Publications, 1994



于树友 吉林大学控制科学与工程系博士研究生。1997 年于吉林工业大学获得学士学位, 2005 年于吉林大学获得硕士学位。主要研究方向为模型预测控制的理论与应用, 鲁棒控制。本文通信作者。E-mail: yushuyou@126.com  
(YU Shu-You Ph.D. candidate in the Department of Control Science and

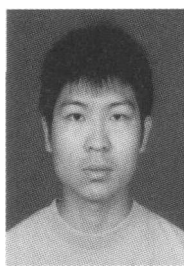
Engineering, Jilin University. He received his bachelor degree from Jilin University of Technology in 1997, and his master degree from Jilin University in 2005. His research interest covers theory and application of model predictive control, and robust control. Corresponding author of this paper.)



陈虹 吉林大学教授。1983 年和 1986 年分别获得浙江大学过程控制专业学士学位和硕士学位。1997 年获得德国斯图加特大学博士学位。主要研究方向为模型预测控制、最优和鲁棒控制以及它们在过程控制和机电系统中的应用。

E-mail: chenh@jlu.edu.cn

(CHEN Hong Professor at Jilin University. She received her bachelor and master degrees in process control from Zhejiang University in 1983 and 1986, respectively, and Ph.D. degree from University of Stuttgart, Germany, in 1997. Her research interest covers model predictive control, optimal and robust control, and applications in process engineering and mechatronic systems.)



张鹏 2007 年于吉林大学控制科学与工程系获得硕士学位。主要研究方向为分布式模型预测控制理论与应用。

E-mail: ziyedeyun@sohu.com

(ZHANG Peng Received his master degree in the Department of Control Science and Engineering, Jilin University in 2007. His research interest covers theory and application of distributed model predictive control.)



李学军 长春大学电子信息工程学院副教授, 工学博士。2007 年于吉林大学控制科学与工程系获得博士学位。主要研究方向为鲁棒控制和时滞系统控制。

E-mail: yulgju@126.com

(LI Xue-Jun Associate professor, Ph.D. at Institute of Electric Information Engineering, Changchun University. He received his Ph.D. degree in the Department of Control Science and Engineering, Jilin University in 2007. His research interest covers robust control and delay system control.)