

含有时滞和时滞微分不确定系统的 H_∞ 滤波李学军^{1,2} 陈虹¹ 于树友¹

(1. 吉林大学通信学院, 长春 130025 2. 长春大学电子信息工程学院, 长春 130022)

摘要: 研究含有状态时滞和状态时滞微分的参数不确定性系统的 H_∞ 滤波问题, 其不确定性为多框架目标类型。对所有允许的参数不确定性系统, 设计一个线性滤波器, 使得由不确定性系统和滤波器构成的误差系统为渐进稳定的, 同时使误差系统输入输出的传递函数的 H_∞ 范数满足性能指标要求。基于线性矩阵不等式技术, 给出滤波器存在的充分条件及参数计算。以一个数值例子说明该方法的有效性和可行性。

关键词: 中立时滞, 不确定性, 鲁棒 H_∞ 滤波, 线性矩阵不等式

中图分类号: TP 13 **文献标识码:** A

Filtering for Neutral Delay Differential Uncertain System

Li Xuejun² Chen Hong¹ Yu Shuyou¹

(1. College of Communication Engineering, Jilin University, Remin Str. 142, 130025 Changchun, China)

(2. Electronic Engineering College, Changchun University, Changchun, 130022, China)

Abstract: This paper deals with the problem of robust H_∞ filtering for a class of neutral delay differential uncertain systems, where the uncertainties belong to the polytopic type. The main purpose is to design a linear filter which can guarantee that the filtering error system remains asymptotically stable and the transfer function meets the prespecified H_∞ -norm performance. Based on the Linear Matrix Inequality technique, the sufficient conditions for the existing stable linear filter are derived and the parameters of the robust filter are given. A numerical example illustrates the effectiveness and feasibility of the method.

Keywords: neutral delay, uncertainty, robust H_∞ filtering, linearmatrix inequality

时滞现象广泛存在于实际系统中。由于时滞是引起系统不稳定和使系统性能恶化的根源, 因此对时滞系统的研究具有重要的理论和实际意义。随着 H_∞ 滤波理论的发展, 时滞系统的估计也成为一个研究热点。文献 [1, 2] 介绍时滞系统的 H_1 、 H_2 滤波方法, 给出时滞依赖和时滞独立的充分条件。对广义中立这类系统的理论研究和应用在近几年也得到重视^[3-4], 文 [5] 给出一类线性中立时滞确定性系统的 H_∞ 滤波方法。然而实际系统本身都具有结构或参数不确定性, 但到目前为止还没有文献讨论含有不确定性的时滞系统的滤波问题。因此, 本文研究具有参数不确定的中立时滞系统的 H_∞ 滤波, 其中不确定性为多胞类型。基于 IMI 给出满足性能

指标的不确定中立时滞系统的 H_∞ 滤波器的设计方法。通过 MATLAB 软件中的 LMI 工具箱, 可以很方便地求出滤波器的参数。虽然系统的参数是不确定的, 却可以找到一优化的滤波器。用一个数值例子说明该文方法的有效性和可行性。

1 问题描述

考虑一类含有时滞微分的系统:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_0 x(t) + A_1 x(t-h) + A_2 x(t-\tau) + Bw(t) \\ y(t) &= C_1 x(t) + D_1 w(t) \\ x(t+\theta) &= \phi(\theta) \quad \forall \theta \in [-H, 0] \end{aligned} \quad (1)$$

本项目为国家自然科学基金 (编号: 60374027) 和国家自然科学基金重点项目 (编号: 60234030)。

本文于 2006 年 9 月收到。李学军: 博士研究生, 副教授; 陈虹: 教授, 博士生导师; 于树友: 博士生。

其中, $x(t) \in R^n$ 是状态矢量, A_0, A_1, A_2, B, C, D 为相应维数的定常实数矩阵, 隶属于某一凸集合, 即:

$$\begin{aligned} (A_0, A_1, A_2, B, C, D) &\in D \\ D &= \left\{ (A_0, A_1, A_2, B, C, D) \right. \\ &\quad \left. = \sum_{i=1}^l \tau_i (A_{0i}, A_{1i}, A_{2i}, B_i, C_{yi}, D_i); \tau_i \geq 0 \right. \\ &\quad \left. \sum_{i=1}^l \tau_i = 1 \right\} \end{aligned}$$

$w(t) \in R^n$ 是在 L_2 空间中的扰动信号, $y(t) \in R^l$ 是测量输出, $\hat{x}(t) \in R^n$ 是被估计状态矢量, h 及 τ 是延迟时间, 均为正的常数。 $\phi(t)$ 初始矢量。假设系统 (1) 是二次稳定的, 这种假设能保证估计误差的有界性。鲁棒滤波问题的目的是能得到被估计信号 $\hat{x}(t)$ 的估计值 $\hat{x}(t)$ 以保证在估计误差意义下的性能指标的最小化。阶次与系统相同、渐进稳定的滤波器的状态方程和输出方程可描述为:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + A_e\hat{x}(t-h) + A_2\hat{x}(t-\tau) + B_1y(t) \\ \hat{z}(t) &= C\hat{x}(t) \end{aligned} \quad (2)$$

$$\hat{x}(0) = 0, \quad \hat{x} \in [-H, 0]$$

其中, $\hat{x}(t) \in R^n$ 表示滤波器的状态, A, B_1 为待定滤波器的参数。

定义状态变量 $\bar{x} = [\bar{x}(t) \quad (x(t) - \hat{x}(t))^T]^T$, 则误差系统的动态描述如下:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}(t) &= A\bar{x}(t) + A_e\bar{x}(t-h) + A_2\bar{x}(t-\tau) + B_1w(t) \\ \bar{z}(t) &= C\bar{x}(t) \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} A_0 & 0 \\ A_0 - B_1C - A_1 & A_1 \end{bmatrix}, \quad A_e = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix}, \\ A_2 &= \begin{bmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} B \\ B - B_1D \end{bmatrix}, \quad C = [0 \quad C_2]. \end{aligned}$$

设计一个稳定的线性滤波器 (2) 使之满足:

① 滤波误差系统 (3) 是鲁棒稳定的

$$\sup_{0 \neq w \in L_2[0, \infty]} \frac{\|\bar{z}(t)\|_2}{\|w(t)\|_2} < \gamma \quad (4)$$

2 主要结果

引理 1^[4]: 对给定的正实标量 h 和 τ 及任意矩阵 $E_1, E_2 \in R^{n \times n}$ 算子 $D(x): J \rightarrow R^n$ 定义为 $D(x) = x(t) + E_1 \int_{t-h}^t x(s) ds - E_2 x(t-\tau)$, 若存在正定矩阵 Γ 标

量 α_1, α_2 使

$$\begin{bmatrix} E_2^T \Gamma E_2 - \epsilon_1 \Gamma & h E_2^T \Gamma E_1 \\ * & h E_1^T \Gamma E_1 - \alpha_2 \Gamma \end{bmatrix} < 0, \quad \alpha_1, \alpha_2 < 1$$

成立, 则算子 $D(x)$ 是稳定的。

因此, 式

$$\bar{x}(t) = A\bar{x}(t) + A_e\bar{x}(t-h) + A_2\bar{x}(t-\tau) + B_1w(t)$$

可改写为:

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dt} \bar{x}(t) + A_e \int_{t-h}^t \bar{x}(s) ds - A_2 \bar{x}(t-\tau) \\ = A\bar{x}(t) + A_e\bar{x}(t) + B_1w(t) \end{aligned} \quad (5)$$

对 $\forall (A_0, A_1, A_2, B, C, D) \in D$ 定义算子

$$D(\bar{x}_t) = \left[\bar{x}(t) + A_e \int_{t-h}^t \bar{x}(s) ds - A_2 \bar{x}(t-\tau) \right].$$

根据引理 1, 算子 $D(\bar{x}_t)$ 稳定的充分条件是存在正定矩阵 Γ 以及正标量 α_1 和 α_2 使

$$\begin{bmatrix} A_{2e}^T \Gamma A_{2e} - \alpha_1 \Gamma & h A_{2e}^T \Gamma A_{1e} \\ * & h A_{1e}^T \Gamma A_{1e} - \alpha_2 \Gamma \end{bmatrix} < 0$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 < 1$$

下面给出估计误差系统渐进稳定的充分条件:

定理 1: 假设系统 (3) 的算子式是稳定的, 当 $w(t) = 0$ 时, 若存在 $P > 0, R_1 > 0, R_2 > 0$ 满足下列线性矩阵不等式:

$$\begin{bmatrix} (A_i + A_{ei})^T P + R_1 + * & * \\ + P(A_i + A_{ei}) + hR_1 & R_2 & * \\ - A_{2e}^T P(A_i + A_{ei}) & & \\ h A_{1e}^T P(A_i + A_{ei}) & 0 & -hR_1 \end{bmatrix} < 0$$

$$\forall (A_0, A_1, A_2, B, C, D) \in D \quad (6)$$

则该滤波误差系统是渐进稳定的。

证明同文献 [5], 故略去。

对于 $\forall (A_0, A_1, A_2, B, C, D) \in D$ 由有界实引理^[6] 知滤波器存在及由被估计系统 (1) 和滤波器 (2) 构成的误差系统满足 $\|T_{zw}(t)\|_\infty < \gamma$ 的性能指标由如下定理给出。

定理 2: 对中立时滞不确定系统 (3) 如果存在正实数 γ , 矩阵 $P_1 > 0, P_2 > 0, R_1 > 0, R_2 > 0$ 以及矩阵 M_1, M_2 使得 (7) 式的优化问题成立, 则滤波器 (2) 是一个线性稳定的 H_∞ 滤波器。滤波误差系统满足 $\|\bar{z}(t)\|_2 < \gamma \|w(t)\|_2$, 鲁棒滤波器的参数

$$\begin{aligned} A &= P_2^{-1} M_2 \\ B_1 &= P_2^{-1} M_1 \end{aligned}$$

$$\min_{\gamma} \text{ subject to } \begin{bmatrix} \Pi_1 & * & * & * & * & * & * \\ \Pi_2 & \Pi_3 & * & * & * & * & * \\ \Pi_4 & 0 & -\frac{1}{2}R_1 & * & * & * & * \\ \Pi_5 & -A_2^T(M_2 + P_2 A_i) & -\frac{1}{2}R_2^T & -\frac{1}{2}R_3 & * & * & * \\ \Pi_6 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}R_4 & * & * \\ \Pi_7 & hA_1^T(M_2 + P_2 A_i) & 0 & 0 & -\frac{1}{2}R_5^T & -\frac{1}{2}R_6 & * \\ B_1^T P_1 & B_1^T P_2 - D_{y1}^T M_1^T & -B_1^T P_1 A_i & \Pi_8 & \Pi_9 & \Pi_{10} & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (7)$$

其中,

$$\Pi_1 = (A_0 + A_i)^T P_1 + P_1 (A_0 + A_i) + R_1$$

$$\Pi_2 = P_2 A_0 - M_1 C_{y1} - M_2 + R_2$$

$$\Pi_3 = A_1^T P_2 + P_2 A_i + M_2^T + M_2 + R_3 + C_{z1}^T C_{z1}$$

$$\Pi_4 = -A_2^T P_1 (A_0 + A_i)$$

$$\Pi_5 = -A_2^T P_2 A_0 + A_2^T M_1 C_{y1} + A_2^T M_2$$

$$\Pi_6 = hA_1^T P_1 (A_0 + A_i)$$

$$\Pi_7 = hA_1^T P_2 A_0 - hA_1^T M_1 C_{y1} - hA_1^T M_2$$

$$\Pi_8 = B_1^T P_2 A_i + D_{y1}^T M_1^T A_i$$

$$\Pi_9 = hB_1^T P_1 A_i$$

$$\Pi_{10} = hB_1^T P_2 A_i - hD_{y1}^T M_1^T A_i$$

证明: 定义二次函数

$$V(x(t), y) = x^T(t) P x(t),$$

$$\begin{bmatrix} (A_0 + A_e)^T P + P(A_0 + A_e) + hR_1 + R_2 + C_e^T C_e & * & * & * \\ -A_2^T P(A_0 + A_e) & -R_2 & * & * \\ hA_1^T P(A_0 + A_e) & 0 & -hR_1 & * \\ B_e^T P & -B_e^T P A_e & hB_e^T P A_e & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \quad (8)$$

$\lambda < 0$ 等价于 $\sum < 0$, 定义矩阵

$$R = \begin{bmatrix} R_1 & R_2 \\ R_2^T & R_3 \end{bmatrix} > 0, R_1 = \frac{R}{2h}, R_2 = \frac{R}{2}, P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} > 0$$

$P_1 > 0, P_2 > 0$ 因为 A_0, A_1, A_2, B_1, C_e 关于 $A_0, A_1, A_2, B_1, C_e, D_e$ 是仿射的, 将 P, R 和 $A_0, A_1, A_2, B_1, C_e, D_e$ 代入 (8) 中, 得到的矩阵不等式是非线性的, 定义:

$$M_1 = P_2 B_1$$

$$M_2 = P_2 A_1$$

应用 Schur 补定理, 易得到 (7) 式。

3 计算实例

考虑含有时滞和时滞微分项的线性不确定性系

设目标函数为

$$J = \int_0^\infty \dot{x}^T(t) z(t) - \gamma^2 \omega^T(t) \omega(t) + V[x(t), y(t)] dt$$

当 $\lambda < 0$ 时, 滤波误差系统 (3) 的 L_2 增益小于 γ , 即误差系统满足 H_∞ 性能要求。目标函数等价于:

$$J = \int_0^\infty \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-\tau) \\ \frac{1}{h} A \int_{t-h}^t x(s) ds \\ \omega(t) \end{bmatrix}^T \cdot \sum \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-\tau) \\ \frac{1}{h} A \int_{t-h}^t x(s) ds \\ \omega(t) \end{bmatrix} dt$$

其中 $\sum$ 如 (8) 式所示:

统式 (1) 参数为:

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} -0.2 & 0.2 \\ 0.2 & -0.3 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.05 \\ 0.05 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} -0.3 \\ 1 \end{bmatrix}, G = [1 \quad y], C = [1 \quad 1], D = [1], h = \epsilon,$$

其中各系数矩阵中的变量隶属于某一集合, $\epsilon \in [-4, -6], \eta \in [0.09, 0.11], \lambda \in [0.002, 0.006], \epsilon \in [0.05, 1]$, 也就是参数不确定性为多胞类型。

设计形如 (2) 的滤波器, 使得由滤波器和不确定性系统组成的误差系统是渐进稳定的, 同时扰动输入到误差输出的传递函数的 H_∞ 范数最小。通过 MATLAB 工具箱中的 mincx 求解线性矩阵不等式, 其解分别为:

$$P_2 = \begin{bmatrix} 0.0458 & 0.0985 \\ 0.0985 & 0.2119 \end{bmatrix}, M_1 = \begin{bmatrix} -1.1296 & -0.5365 \\ -0.5365 & -1.0639 \end{bmatrix}$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 0.6482 \\ -0.3805 \end{bmatrix},$$

滤波器的参数为:

$$A = \begin{bmatrix} -2.9738 & -0.1417 \\ 1.3820 & 0.0654 \end{bmatrix} \times 10^4, B = \begin{bmatrix} 2.7874 \\ -1.2959 \end{bmatrix} \times 10^4$$

$$C = [1 \quad 1],$$

误差系统的最小 H_∞ 范数 γ 等于 0.0518

4 结 论

本文讨论了含有时滞微分参数不确定性系统的 H_∞ 滤波问题, 给出滤波误差系统渐进稳定的充分条件并加以证明。基于线性矩阵不等式技术设计 H_∞ 滤波器, 使得由被估计系统和滤波器构成的误差系统满足鲁棒性能要求, 推导出滤波器存在的条件, 求出滤波器的各个参数。给出一个数值例子说明该方法的可行性。从式 (7) 可知, 该文设计的滤波器的鲁棒性独立于时间延迟常数 τ , 因此本文方法也适用于时变的时滞系统。

参考文献:

[1] De Souza C., Li X., Delay-dependent robust H_∞ control of uncertain linear state delayed J., Automatica, 1999

35(5): 1313—1321

- [2] Pili A. W., Shaked U., de Souza C. E., H_∞ filtering for continuous time linear systems with delay J., IEEE Transactions on Automatic Control, 1999, 44(7): 1412—1417
- [3] GuangDa Hu and Baruch Cahlon, Estimations on numerically stable step size for neutral delay differential systems with multiple delays J., Journal of Computational and Mathematics, 1999, 102(2): 221—234
- [4] D. Yue, S. Won and Q. Kwon, Delay-dependent stability of neutral systems with time delay: an LMI approach J., EE Proceedings Control Theory and Applications, 2003, 150(1): 23—27.
- [5] Q. Kwon, Ju H. Park and S. Won, LMI approach to robust H_∞ filtering for neutral delay differential systems J., Applied Mathematics and Computation, 2004, 150(1): 235—244
- [6] L. Xie, Output feedback H_∞ control of systems with parameter uncertainty J., Internat. J. Control, 1996, 63(4): 741—750

作者简介:

李学军: 女, 副教授, 1968 年出生。长春大学电子信息工程学院, 吉林大学通信学院在读博士生。主要研究方向为鲁棒控制与滤波。

陈虹: 女, 教授, 1963 年出生, 博士生导师。主要研究方向为鲁棒控制, 预测控制, 非线性控制, 汽车电子等。