

基于LMI优化的 H_∞ /广义 H_2 输出反馈主动悬架控制

于树友 马苗苗 陈虹

(吉林大学控制科学与工程系, 长春, 130025)

摘要:在多目标控制框架下, 基于线性矩阵不等式(LMI)优化技术, 提出了一种 H_∞ /广义 H_2 输出反馈控制策略: 利用广义 H_2 范数描述系统的时域硬约束, 同时选择 H_∞ 范数最小化系统的性能输出, 最终将系统的控制律归结为求解具有LMI约束的(半)正定规划问题。对四自由度(4DOF)二分之一车主动悬架系统的仿真表明: H_∞ /广义 H_2 输出反馈主动悬架系统能用有限的主动动力保证操纵稳定性, 并明显改善乘坐舒适性。

关键词:主动悬架; 时域硬约束; H_∞ /广义 H_2 范数; LMI优化

中图分类号: TP271

文献标识码: A

 H_∞ /Generalized H_2 Output Feedback Active Suspension Control via LMI Optimization

Yu Shuyou, Ma Miaomiao, Chen Hong

(Department of Control Science and Engineering, Jilin University, Changchun, 130025, China)

Abstract: In the framework of multi-objective control, this paper presents a mixed H_∞ /generalized H_2 output feedback control strategy via LMI optimization for the active suspension control. The generalized H_2 norm is adapted to capture requirements for satisfying time-domain hard constraints and the H_∞ norm to minimize the performance outputs. The control problem with hard constraints is converted into a semi-definite programming problem. Simulation results for a 4DOF half-car model indicate that the mixed H_∞ /generalized H_2 active suspension system achieves control stability. The ride comfortableness by a limited active force is improved.

Key words: active suspension; time-domain hard constraints; H_∞ /generalized H_2 norm; LMI optimization

引言

悬架设计时主要考虑3项性能指标: 尽量使乘客不受路面不平的影响(乘坐舒适性); 抑制轮胎的振动以维持轮胎与路面的接触(操纵稳定性); 保持悬架动行程在允许的范围内以免撞击限位块从而破坏乘坐舒适性(机械约束)^[1]。同时, 汽车发动机由于受功率的限制, 能够提供给悬架系统的主动动力是有限的(执行机构饱和)^[2]。上述诸性能要求是相互矛盾和冲突的。例如当车辆以较高的时速通过路

面上的包块或者坑时, 降低车身加速度以提高乘坐舒适性将需要较大的悬架动行程, 这有可能导致悬架撞击限位块, 悬架一旦撞击限位块, 不仅会降低乘坐舒适性, 而且会导致车辆物理器件的磨损甚至损坏^[3]。实际上在这些性能要求中, 只有乘坐舒适性需要优化, 而其他性能指标只要不超出相应的限定范围即可^[1]。文献[4, 5]将悬架的控制问题归结为约束系统的干扰抑制问题, 对应地提出了基于LMI优化的多目标状态反馈控制策略。考虑到主动悬架系统的状态是不能全部测量的, 难以直接应

基金项目: 国家自然科学基金(60374027)资助项目; 吉林大学“985工程”资助项目。

收稿日期: 2006-03-15; **修订日期:** 2006-04-30

作者简介: 于树友, 男, 博士研究生, 1974年12月生; 陈虹(联系人), 女, 教授, 博士生导师, E-mail: chenrh@jlu.edu.cn。

用状态反馈对悬架系统进行控制,虽然可以采用状态观测或重构技术间接获取系统的状态,但考虑到实施成本和系统可靠性等因素,如果用系统的输出反馈控制来获得期望的闭环性能,则更适合于选择输出反馈的控制方式。本文提出了一种可处理此类问题的 H_∞ /广义 H_2 输出反馈控制方法,并将其应用于主动悬架系统的设计。

1 H_∞ /广义 H_2 输出反馈控制

考虑线性时不变系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_1w(t) + B_2u(t) \\ z_1(t) = C_1x(t) + D_{11}w(t) + D_{12}u(t) \\ z_2(t) = C_2x(t) + D_{21}w(t) + D_{22}u(t) \\ y(t) = C_3x(t) + D_{31}w(t) \end{cases} \quad (1)$$

式中: $x \in R^n$ 为状态变量; $w \in R^{m_1}$ 和 $u \in R^{m_2}$ 分别为外部输入(包括干扰和跟随输入)和控制输入; $y \in R^{p_1}$ 为测量输出; $z_1 \in R^{p_2}$ 为控制输出; $z_2 \in R^{p_3}$ 为归一化的约束输出,即

$$\|z_2(t)\| \leq 1, \quad \forall t \geq 0 \quad (2)$$

控制问题是设计输出反馈控制器使得对所有能量有界的扰动,闭环系统内部稳定,满足约束(2)且从外部输入 $w(t)$ 到控制输出 $z_1(t)$ 的 H_∞ 范数最小。

首先考虑系统硬约束(2)。记从 $w(t)$ 到 $z_2(t)$ 的传递函数 T 的广义 H_2 范数^[6]为 $\|T\|_s$

$$\|T\|_s = \sup \left\{ \left\| z_2(t) \right\| : x(0) = 0, t \geq 0, \int_0^\infty \|w(\tau)\|^2 d\tau \leq 1 \right\}$$

其物理意义是在不大于单位能量的输入作用下,系统输出峰值的上确界。假设系统(1)的外部输入能量不大于1,则要求系统满足硬约束(2)可直接描述为要求系统从外部输入 $w(t)$ 到约束输出 $z_2(t)$ 的广义 H_2 范数小于1,即 $\|T\|_s \leq 1$ 。

设输出反馈控制器 $K(s)$ 具有如下形式

$$\begin{cases} \dot{\zeta}(t) = A_k \zeta(t) + B_k y(t) \\ u(t) = C_k \zeta(t) + D_k y(t) \end{cases} \quad (3)$$

将控制器(3)应用到系统(1)后得到的闭环系统是

$$\begin{cases} \dot{x}_{cl}(t) = A_{cl} x_{cl}(t) + B_{cl} w(t) \\ z_1(t) = C_{cl,1} x_{cl}(t) + D_{cl,1} w(t) \\ z_2(t) = C_{cl,2} x_{cl}(t) + D_{cl,2} w(t) \end{cases} \quad (4)$$

式中增广系统的状态变量 $x_{cl} = [x^T, \zeta^T]^T$, 矩阵

$$\begin{aligned} A_{cl} &= \begin{bmatrix} A + B_2 D_k C_3 & B_2 C_k \\ B_k C_3 & A_k \end{bmatrix} \\ B_{cl} &= \begin{bmatrix} B_1 + B_2 D_k D_{31} \\ B_k D_{31} \end{bmatrix} \\ C_{cl,1} &= [C_1 + D_{12} D_k C_3 \quad D_{12} C_k] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{cl,1} &= D_{11} + D_{12} D_k D_{31} \\ C_{cl,2} &= [C_2 + D_{22} D_k C_3 \quad D_{22} C_k] \\ D_{cl,2} &= D_{21} + D_{22} D_k D_{31} \end{aligned}$$

根据文献[6], A_{cl} 是内部稳定的且从 $w(t)$ 到 $z_1(t)$ 的 H_∞ 性能小于某个给定的正数 γ ,这等价于存在对称矩阵 $P_1 > 0$ 满足矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} A_{cl}^T P_1 + P_1 A_{cl} & P_1 B_{cl} & C_{cl,1}^T \\ B_{cl}^T P_1 & -I & D_{cl,1}^T \\ C_{cl,1} & D_{cl,1} & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (5)$$

从 $w(t)$ 到 $z_2(t)$ 的广义 H_2 范数小于1等价于存在一个对称矩阵 $P_2 > 0$ 满足

$$\begin{bmatrix} A_{cl}^T P_2 + P_2 A_{cl} & P_2 B_{cl} \\ B_{cl}^T P_2 & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (6a)$$

$$\begin{bmatrix} P_2 & C_{cl,2}^T \\ C_{cl,2} & I \end{bmatrix} < 0, D_{cl,2} = 0 \quad (6b)$$

在多目标控制框架下^[6]令 $P_1 = P_2 = P$,将 P 和 P^{-1} 分解为 $P = \begin{bmatrix} Y & N \\ N^T & W \end{bmatrix}$, $P^{-1} = \begin{bmatrix} X & M \\ M^T & Z \end{bmatrix}$,其中 X 和 Y 是 $n \times n$ 的对称正定矩阵。

$$\begin{aligned} \text{设 } F_1 &= \begin{bmatrix} X & I \\ M^T & 0 \end{bmatrix}, F_2 = \begin{bmatrix} I & Y \\ 0 & N^T \end{bmatrix} \text{ 和} \\ \begin{cases} \hat{A}_i &= N A_i M^T + N B_i C_3 X + Y B_i C_i M^T + \\ & Y (A + B_2 D_k C_3) X \\ \hat{B}_i &= N B_i + Y B_i D_k \\ \hat{C}_i &= C_i M^T + D_k C_3 X \\ \hat{D}_i &= D_k \end{cases} \end{aligned} \quad (7)$$

利用 $\text{diag}\{F_1^T, I, I\}$ 对式(5)进行同余变换,则矩阵不等式(5)等价于

$$\begin{bmatrix} S_0 & * & * & * \\ S_1^T & S_2 & * & * \\ (B_1 + B_2 \hat{D} D_{31})^T & (Y B_1 + \hat{B} D_{31})^T & -I & * \\ C_1 X + D_{12} \hat{C} & C_1 + D_{12} \hat{D} C_3 & S_3 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (8)$$

式中: $S_0 = AX + XA + B_2 \hat{C} + (B_2 \hat{C})^T$; $S_1 = \hat{A}^T + A + B_2 \hat{D} C_3$; $S_2 = A^T Y + Y A + \hat{B} C_3 + C_3^T \hat{B}^T$; $S_3 = D_{11} + D_{12} \hat{D} D_{31}$; * 表示沿对角线对称位置的块矩阵的转置。

由于 $F_1^T P F_1 = F_2^T F_1 = \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix}$,且 $P > 0$, F_1 为列满秩矩阵,所以有

$$\begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} > 0 \quad (9)$$

显然式(6a)内蕴于式(5),利用 $\text{diag}\{F_1^T, I\}$ 对式(6b)进行同余变换,有

$$\begin{bmatrix} X & * & * \\ I & Y & * \\ C_2X + D_{22}\hat{C} & C_2 + D_{22}\hat{D}C_3 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (10a)$$

$$D_{21} + D_{22}\hat{D}D_{31} = 0 \quad (10b)$$

显然式(9)内蕴于式(10a)。

注1 等式约束(10b)不是矩阵变量 $\hat{D}$ 的凸约束。在调用LMI工具箱之前必须给出矩阵方程(10b)关于变量 $\hat{D}$ 的通解结构。将 D_{22} 作奇异值分解, $D_{22}=[u_1 \ u_2]\begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix}^T$, 其中 s_1 是非零奇异值组成的对角矩阵, u_1 和 v_1 是非零奇异值对应的向量组成的矩阵, u_2 和 v_2 是零奇异值对应的向量组成的矩阵。 $[u_1 \ u_2]$ 与 $[v_1 \ v_2]$ 是正交矩阵。同理 D_{31} 可分解为

$$D_{31}=[w_1 \ w_2]\begin{bmatrix} s_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}^T$$

则式(10b)可以写成

$$\begin{aligned} & [u_1 \ u_2]\begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix}^T \hat{D} \begin{bmatrix} w_1 & w_2 \end{bmatrix} \cdot \\ & \begin{bmatrix} s_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}^T = -D_{21} \end{aligned} \quad (11)$$

记 $dk_0=-v_1\text{diag}\{1/s_1\}u_1^TD_{21}z_1\text{diag}\{1/s_r\}w_1^T$, 则 dk_0 是非齐次矩阵方程(11)的一个特解, 而 $dk=[v_1 \ v_2]\begin{bmatrix} 0 & * \\ * & * \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_1 & w_2 \end{bmatrix}^T$ 是方程(11)对应的齐次矩阵方程的基础解系。其中, $*$ 为任意元素, 0 是元素均为零的矩阵, 其维数由 v_1 和 w_1 的维数决定。

由以上的讨论, 矩阵变量 $\hat{D}$ 可参数化为

$$\begin{aligned} \hat{D} = & -v_1\text{diag}\{1/s_1\}u_1^TD_{21}z_1\text{diag}\{1/s_r\}w_1^T + \\ & [v_1 \ v_2]\begin{bmatrix} 0 & d_1 \\ d_2 & d_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_1 & w_2 \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

其中 d_1, d_2 和 d_3 是待决策变量。另外, 当 $u_2^TD_{21}=0$ 或 $D_{21}z_2=0$ 时, 方程(11)显然无解。

考虑LMI优化问题

$$\min \gamma^2 \text{ subject to (8), (10a)} \quad (12)$$

$\gamma, X, Y, A, B, C, D(d_1, d_2, d_3)$

如果LMI优化问题存在最优解, 则所设计的输出反馈控制器 $K(s)$ 保证闭环系统是内部稳定的; 从 $w(t)$ 到 $z_1(t)$ 的H_∞范数最小; 在不大于单位能量干扰下满足所考虑的硬约束条件。

注2 求解LMI优化问题(12)得到输出反馈控制器的方法可能是保守的, 这主要是由于用一个Lyapunov函数 $V(x)=x^TPx$ 满足所有性能要求(H_∞性能, 广义H₂性能)引起的。

在得到线性矩阵不等式组(11)的一组解 X, Y 和 $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}$ 后, 为了通过变量替换关系式(7)求得所要设计的控制器参数, 首先要知道矩阵 M 和 N 的值。根据恒等式 $PP^{-1}=I$, 得 $MN^T=I-XY$, 因而在得到了矩阵 X, Y 的值后, 可以通过矩阵 $I-XY$ 的奇异值分解得到满秩矩阵 M 和 N 。由于 $I-XY>0$, 若假定控制器维数和系统维数相同, 则 M 和 N 可逆。控制器参数可通过以下公式获得

$$\begin{cases} A_k = N^{-1}[\hat{A} - Y(A + B_2D_kC_3)X](M^T)^{-1} - \\ \quad B_kC_3X(M^T)^{-1} - N^{-1}YB_2C_k \\ B_k = N^{-1}(\hat{B} - YB_2D_k) \\ C_k = (\hat{C} - D_kC_3X)(M^T)^{-1} \\ D_k = \hat{D} \end{cases}$$

2 H_∞/广义H₂主动悬架控制

2.1 主动悬架控制

四自由度半车主动悬架模型如图1所示^[7]。其中: z_c 和 φ 分别表示汽车悬挂质量重心处的垂向位移和俯仰角; z_{u1}, z_{u1} 和 z_{u2} 分别表示前后悬架的悬挂质量、非悬挂质量以及路面的垂向位移; f_{a1} 为前悬架控制力输入; f_{a2} 为后悬架控制力输入。车辆各参数的含义及取值见表1。

表1 二分之一车参数

参数 (符号)	值
悬挂质量(m_s)	690 kg
前悬架非悬挂质量(m_{u1})	40 kg
后悬架非悬挂质量(m_{u2})	45 kg
前悬架刚度(k_{s1})	18 000 N/m
后悬架刚度(k_{s2})	22 000 N/m
车身转动惯量(I_φ)	1 222 kg · m ²
前(后)轮轮胎刚度(k_{u1})	200 000 N/m
前(后)悬架阻尼(C_{u1})	1 000 (N · s · m ⁻¹)
重心到前轴的距离(l_f)	1.3 m
重心到后轴的距离(l_r)	1.5 m
最大动行程($S_{\max}$)	0.08 m
最大作动力($F_{\max}$)	1 500 N

选取状态向量

$$x_v = [(z_s - z_u)^T \ z_s^T \ (z_u - z_r)^T \ z_u^T]^T \in R^8$$

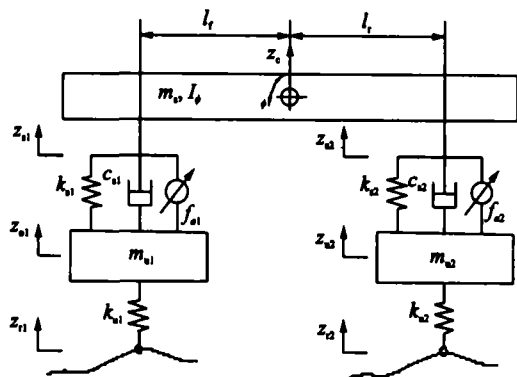


图1 四自由度半车模型

设计悬架首先要考虑车辆乘坐舒适性的要求,而车身垂直加速度 $\ddot{z}_c$ 与俯仰加速度 $\ddot{\phi}$ 是评价乘坐舒适性的主要指标。兼顾操纵稳定性的要求,轮胎与路面的动载荷不能超过轮胎的静载荷^[1],即 $k_{ui}(z_{ui} - z_{ri}) \leq f_{kui}, i=1,2$ 。其中, $k_{ui}(z_{ui} - z_{ri})$ 为轮胎动载荷; f_{kui} 为轮胎静载荷。根据车辆静态下力平衡及力矩平衡方程获得^[5]

$$\begin{cases} f_{ku1} = (l_f m_s g + (l_f + l_r) m_{u1} g) (l_f + l_r)^{-1} \\ f_{ku2} = (l_f m_s g + (l_f + l_r) m_{u2} g) (l_f + l_r)^{-1} \end{cases}$$

又由于悬架机械结构的行程限制,还应将悬架的动行程限制在一定的范围内,以免撞击限位块破坏乘坐舒适性,即 $|z_{pi} - z_{ui}| \leq S_{max}, i=1,2$ 。另外考虑到汽车发动机的功率限制,液压伺服机构只能提供有限的主动力 $|f_{ai}| \leq F_{max}, i=1,2$ 。

除此之外,主动悬架控制系统的加权性能输出和归一化约束输出分别为

$$z_1 = [q_1 \ddot{z}_c \quad q_2 \ddot{\phi}]^T$$

$$z_2 = \left[\frac{(z_u - z_u)^T}{S_{max}} \quad F_k (z_u - z_r)^T \quad \frac{f_a^T}{F_{max}} \right]^T$$

其中: $F_k = \text{diag} \left(\frac{k_{u1}}{f_{ku1}}, \frac{k_{u2}}{f_{ku2}} \right)$; q_1 和 q_2 是性能加权系数,根据文献[8]取 $q_1=1$ 和 $q_2=q_1 \sqrt{l_f l_r}$ (四自由度半车系统的微分描述和详细的建模过程请参阅文献[5])。主动悬架控制问题可描述为^[4,5]: 寻找一个控制器,使车辆系统闭环稳定;满足全部硬约束条件(约束输出 z_2 各元素的绝对值小于1)并尽可能改善乘坐舒适性(最小化性能输出 z_1)。

一般情况下,前(后)悬挂质量的垂直加速度可以通过加速度传感器信号经过积分获得,而前(后)悬架动行程可由位移传感器测量。因此系统的测量输出可以选择为 $y = [\dot{z}_c^T \quad (z_u - z_u)^T]^T$ 。

2.2 脉冲响应

当汽车高速通过路面上的坑或者包时,往往导致悬架超出动行程限制,违反接地性要求。为了充

分考虑满足约束和提高性能的关系,本文采用确定性路面输入作为系统的干扰输入,测试设计的主动悬架的响应。

考虑路面上的一个具有如下轮廓的长坡型单凸块 $\frac{A_m}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi l}{L} \right), 0 \leq l \leq L$, 其中 $A_m = 0.1 \text{ m}$, $L = 5 \text{ m}$ 。如图2所示($v = 25 \text{ km/h}$),与被动悬架相比,同一时刻的性能输出幅值明显减小,而且调节时间很短,较大地改善了乘坐舒适性。在被动悬架的约束输出超出限制的时候,主动悬架的约束输出条件仍能满足。

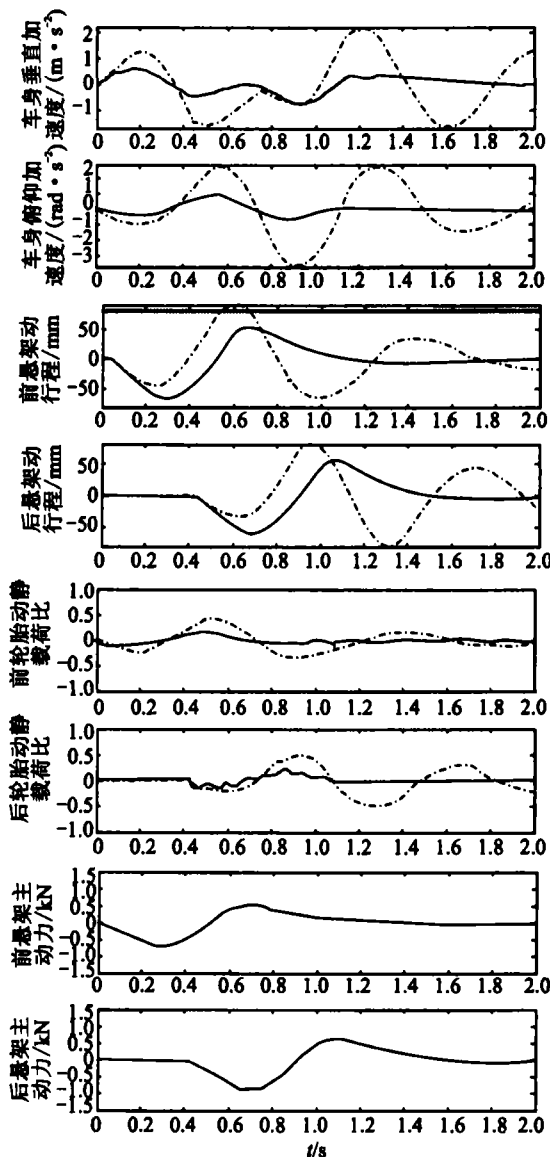


图2 包块响应:主动悬架(—);被动悬架(---)

3 结束语

对具有控制和输出硬约束的主动悬架系统,本文在LMI优化和多目标控制的框架下讨论了一种 H_∞ /广义 H_2 输出反馈控制方法,将控制量和输出量的时域硬约束直接转化为对广义 H_2 范数的限制。

对四自由度(4DOF)二分之一车主动悬架系统的设计和仿真表明: H_∞ /广义 H_2 混合主动悬架系统能用有限的主动力保证操纵稳定性,并明显改善乘坐舒适性。

参考文献:

- [1] Hrovat D. Survey of advanced suspension developments and related optimal control applications[J]. Automatica, 1997, 33(10): 1781-1817.
- [2] Giua A, March C, Usai G. Active axletree suspension for road vehicles with gain-swithing[C]// Proc IEEE 39th International Conference on Decision and Control. Sydney, [s. n.], 2000: 438-443.
- [3] Lin Junshan, Kannellakopoulos I. Road-adaptive nonlinear design of active suspensions [C] // Proc Amer Contr Conf. Albuquerque: [S. n.], 1997: 714-718.
- [4] Chen Hong, Guo Konghui. Constrained H_∞ control of active suspensions, an LMI approach [J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2005, 13(3): 412-421.
- [5] Chen Hong, Liu Zhiyuan, Sun Pengyuan. Application of H_∞ control to active suspension systems on half-car models[J]. ASME, 2005, 127(9): 345-354.
- [6] Scherer C W, Gahinet P, Chilali M. Multi-objective output-feedback control via LMI optimization [J]. IEEE Transaction on Automatic Control, 1997, 42(7): 896-911.
- [7] Wang Jun, Wilson D A, Halikias G D. H_∞ robust performance control of decoupled active suspension systems based on LMI method[C]// Proc Amer Contr Conf. Arlington, [s. n.], 2001: 2658-2663.
- [8] Lauwerys C, Swevers J, Sas P. Design and experimental validation of linear robust controller for an active suspension of a quarter car [C] // Proc Amer Contr Conf. Boston, [s. n.], 2004: 1481-1486.