

分 类 号: TP273

单位代码: 10183

研究生学号: 2013522093

密 级: 公 开



吉 林 大 学

硕 士 学 位 论 文

(学 术 学 位)

基于模型预测控制的移动机器人路径跟踪控制

Path Following Control of Wheeled Mobile Robots Based on
Model Predictive Control

作者姓名: 刘 洋

专 业: 控制理论与控制工程

研究方向: 路径跟踪及模型预测控制

指导教师: 于树友 副教授

培养单位: 通信工程学院

2016 年 6 月

未经本论文作者的书面授权，依法收存和保管本论文书面版本、电子版本的任何单位和个人，均不得对本论文的全部或部分内容进行任何形式的复制、修改、发行、出租、改编等有碍作者著作权的商业性使用（但纯学术性使用不在此限）。否则，应承担侵权的法律责任。

吉林大学硕士学位论文原创性声明

本人郑重声明：所呈交学位论文，是本人在指导教师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已经注明引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品成果。对本文的研究做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本人完全意识到本声明的法律结果由本人承担。

学位论文作者签名：刘峰

日期：2016年6月4日

基于模型预测控制的移动机器人路径跟踪控制
Path Following Control of Wheeled Mobile Robots Based on
Model Predictive Control

作者姓名: 刘 洋

专业名称: 控制理论与控制工程

指导教师: 于树友 副教授

学位类别: 工学硕士

答辩日期: 2016 年 6 月⁴ 日

前言

轮式移动机器人是非线性约束系统的典型代表，本文将其选择为运动控制对象，研究了非线性系统的路径跟踪控制问题。由于非线性模型预测控制 (Nonlinear Model Predictive Control, NMPC) 不仅具有在线优化和滚动控制的优点，而且能够处理系统的状态约束和输入约束。因此，本文将 NMPC 控制方案应用于轮式移动机器人的运动控制，实现了机器人对期望路径的跟踪控制。

具体工作包括：(1)在对路径跟踪问题进行描述后，详细推导并建立了轮式移动机器人的运动学模型，确立了路径跟踪的控制任务。(2)设计 NMPC 控制器，给出开环优化问题具体的数学形式和程序求解步骤，并对优化问题的可行性和控制器的收敛性进行了理论分析。(3)基于非线性多面体描述和线性矩阵不等式求解了保证 NMPC 方案可行性和收敛性的非零终端要素，并通过仿真实验对比分析了基于终端不等式约束的 NMPC 和基于终端等式约束的 NMPC 在系统动态和计算负担方面的不同特点。(4)对求解时变的路径跟踪问题而言，固定形式的终端域具有保守性。为解决这一问题，本文最后设计了改进算法—基于时变终端的 NMPC 方案，仿真结果表明此方法不仅兼顾了路径跟踪问题的时变实质和控制需求，并且扩大了每一时刻系统的终端域。

本文研究工作得到 973 课题 (No.2012CB821202) 和国家自然科学基金 (No.61573165, No.61520106008) 的资助。

摘要

基于模型预测控制的移动机器人路径跟踪控制

学生姓名：刘 洋

专业名称：控制理论与控制工程

指导教师：于树友 副教授

在控制理论中，路径跟踪 (Path Following) 是继定点镇定、轨迹跟踪之后一类重要的运动控制问题。同轨迹跟踪相比，路径跟踪控制器需要同时确定待跟踪期望路径的信息和控制运动对象的系统动态。路径跟踪控制广泛存在于数控机床跟踪磨削、移动机器人运动控制、飞机或轮船的航迹控制和智能车自动驾驶等领域，对路径跟踪及其分支问题进行研究，不仅可以丰富运动控制的理论成果，还可以满足多领域对运动控制技术越来越高的要求，具有重大的理论和工程意义。

轮式移动机器人是非线性约束系统的典型代表，本文将选择其为运动控制对象，对其路径跟踪控制问题进行了研究。同其他控制方法相比，非线性模型预测控制 (Nonlinear Model Predictive Control, NMPC) 具有滚动优化和反馈校正的机理，能够处理系统的状态约束和输入约束。本文将 NMPC 控制方案应用于轮式移动机器人的运动控制，实现了机器人对期望路径的跟踪控制。本文按照如下的系统设计步骤完成了轮式移动机器人路径跟踪控制系统的设计：问题描述、建立被控对象数学模型、依据控制目标设计控制器、闭环系统稳定性分析和仿真验证。

本文首先对路径跟踪控制进行了问题描述，推导并建立了轮式移动机器人的运动学模型，确立了路径跟踪的控制任务。在本文中，存在路径跟踪任务的轮式移动机器人是 Unicycle 型机器人，它由两个独立驱动后轮和一个万向轮构成，机械结构简单，运动形式灵活可控。分析所建立的数学模型，本文的运动控制对象在本质上属于非线性、多输入多输出，同时具有状态和输入约束的系统。

然后，针对具有非线性动态和约束条件的控制任务，本文建立了基于 NMPC 方案的闭环控制结构，给出了开环优化问题具体的数学形式和程序求解步骤，并对优化问题的可行性和系统的性能进行了分析。本文基于非线性多面体描述和线性矩阵不等式求解了保证 NMPC 方案可行性和收敛性的非零终端要素，并通过仿真实验对比分析了基于终端不等式约束的 NMPC 和基于终端等式约束的 NMPC 在系统动态和计算负担方面的不同特点。

仿真实验表明，基于终端不等式约束的 NMPC 和基于终端等式约束的 NMPC 均可使移动机器人在容许控制输入的作用下跟踪参考路径。但基于终端不等式约束的 NMPC 控制方案只能解决光滑路径的跟踪问题，而基于终端等式约束的 NMPC 控制方案计算负担重、在线求解时间长。另外，由于期望路径是实时变化的，路径跟踪问题

的本质具有时变性。无论是基于非零终端的 NMPC 还是基于零终端 NMPC，它们的终端域都是固定形式的，在整个优化问题求解的过程中始终保持不变，这对于时变的路径跟踪问题而言具有保守性。因此本文最后设计了基于时变终端的 NMPC 方案，以解决上述问题。仿真结果表明时变终端不仅兼顾了路径跟踪问题的时变实质和控制需求，并且系统的终端域得以扩大。

关键词：

轮式移动机器人，路径跟踪，模型预测控制 (MPC)，终端约束

Abstract

Path Following Control of Wheeled Mobile Robots Based on Model Predictive Control

Candidate: Liu Yang

Specialty: Control Theory and Control Engineering

Supervisor: Associate Prof. Yu Shuyou

Path following is an important kind of motion control problem as same as the set-point stabilization and trajectory tracking in the control theory. Compared with trajectory tracking, path following controller needs to determine the information of the reference path as well as the system dynamics. Path following is widely present in computer numerical control (CNC) machine tools, motion control of mobile robot, course control of airplane and ship, intelligent autonomous cars and other fields. Therefore, studying path following problem not only can enrich the theoretical results of motion control, but also can meet the requirements of the motion control technique, which has important theoretical and engineering significance.

Wheeled mobile robot is a typical example of the nonlinear constrained system, which is chosen as the motion control plant in this thesis. Compared with other control schemes, nonlinear model predictive control (NMPC) not only has feedback mechanism, but also can handle the system state/input constraints. So NMPC is applied to path following control for wheeled mobile robots. This thesis is organized as follows to accomplish the design of following control system for wheeled mobile robots: problem description, establishment of mathematical model of the controlled plant, controller design according to the control goals, the stability analysis of the closed-loop system and simulation verification.

Firstly, the description of path following problem is given and the kinematic model of unicycle mobile robot is established, then the control task is proposed. The unicycle mobile robot is composed of two independent drive rear-wheels and a universal wheel, in which the simple mechanistic structure makes the movement flexible and reliable. In principle, the unicycle mobile robot is a multiple-input and multiple-output nonlinear system with state and input constraints.

To deal with nonlinear dynamics and constraints, this thesis proposes a model predictive control scheme, in which a nonlinear optimization problem solved online is involved. Both the recursive feasibility of the optimization problem and the system performance are discussed. This thesis computes the terminal ingredients that guarantee the feasibility of

proposed NMPC based on the nonlinear polyhedral description and linear matrix inequalities, and gives the comparison and analysis between the NMPC scheme with terminal inequality constraint and the NMPC scheme with terminal equality constraint.

The simulation results show that both the NMPC scheme with terminal inequality constraint and the NMPC scheme with terminal equality constraint can make the robot follow the reference path under the admissible control inputs. But the NMPC scheme with terminal inequality constraint can only solve the problem with smooth paths, and the online computation burden of the NMPC scheme with terminal equality constraint is much heavier. In accordance with the fact that reference path is time varying, a MPC scheme with time varying terminal sets is proposed which can deal with non-smooth path and have reasonable computational time.

Key Words:

Wheeled Mobile Robots, Path Following, Model Predictive Control (MPC), Terminal Constraint

目录

第1章 绪论	1
1.1 课题的理论背景	1
1.2 课题的工程意义	4
1.3 课题的研究现状	8
1.4 本文的主要研究内容	12
第2章 轮式移动机器人的路径跟踪问题	15
2.1 路径跟踪问题的描述	15
2.2 轮式移动机器人的运动学模型	16
2.3 本章小结	20
第3章 基于 NMPC 的移动机器人路径跟踪控制	21
3.1 基于终端不等式约束的 NMPC 方案	21
3.1.1 约束优化问题描述	22
3.1.2 算法的可行性和收敛性分析	24
3.2 基于 LMI 的 NMPC 终端要素设计方法	27
3.2.1 基于非线性多面体描述的终端约束集	27
3.2.2 终端约束集的优化方法	32
3.3 基于终端等式约束的 NMPC 方案	33
3.4 仿真对比与分析	36
3.4.1 8 字路径	37
3.4.2 圆形路径	41
3.4.3 直线路径	43
3.5 本章小结	46
第4章 基于时变终端的 NMPC 路径跟踪控制	47
4.1 时变终端预测控制	47
4.1.1 时变终端约束集	47
4.1.2 仿真验证	50
4.2 分段终端预测控制	53
4.2.1 系统方案及性能分析	54

4.2.2 仿真验证	58
4.3 本章小结	64
第5章 全文总结及展望	65
5.1 工作总结	65
5.2 研究展望	66
参考文献	67
作者简介及研究成果	75
致谢	77

插图目录

1.1	中国制造业年增加值	4
2.1	轮式移动机器人的简化模型与实物图	16
2.2	大地坐标系下的轮式移动机器人	17
3.1	NMPC 控制结构	21
3.2	两种 NMPC 方案下的系统轨迹	38
3.3	两种 NMPC 方案下的偏差状态	38
3.4	两种 NMPC 方案下的控制输入	39
3.5	两种 NMPC 方案下的前轮转角和轮速	39
3.6	不同初始状态下的系统轨迹	40
3.7	不同初始状态下的系统速度输入	40
3.8	不同初始状态下的系统角速度输入	41
3.9	两种 NMPC 方案下的系统轨迹	42
3.10	两种 NMPC 方案下的偏差状态	42
3.11	两种 NMPC 方案下的控制输入	43
3.12	两种 NMPC 方案下的前轮转角和轮速	44
3.13	零终端预测控制下的系统轨迹	44
3.14	零终端预测控制下的偏差状态	45
3.15	零终端预测控制下的控制输入	45
3.16	零终端预测控制下的前轮转角和轮速	46
4.1	时变的终端不等式约束集	48
4.2	时变终端预测控制下的系统轨迹	50
4.3	时变终端预测控制下的偏差状态	51
4.4	时变终端预测控制下的控制输入	51
4.5	时变终端预测控制下的前轮转角和轮速	52
4.6	时变终端约束集	52
4.7	α_k 的时变曲线	53
4.8	曲率分段示意图	59
4.9	基于分段终端和固定终端的预测控制下的系统轨迹	60
4.10	基于分段终端和固定终端的预测控制下的系统偏差	60

4.11	基于分段终端和固定终端的预测控制下的控制输入	61
4.12	8 字路径的道路曲率示意图	62
4.13	基于分段终端和固定终端的预测控制下的系统轨迹	63
4.14	基于分段终端和固定终端的预测控制下的系统偏差	63
4.15	基于分段终端和固定终端的预测控制下的控制输入	64

第 1 章 绪论

1.1 课题的理论背景

目前，在控制领域中有三大基本的运动控制问题，分别为设定点镇定问题 (set point stabilization)，轨迹跟踪问题 (trajectory tracking) 和路径跟踪问题 (path following)^[1]。最初运动问题的形式为设定点镇定，又称为设定点调节、位姿镇定，简称镇定控制。考虑如下动态系统

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad x(t_0) = x_0 \quad (1.1.1)$$

其中 $x \in R^{n_x}$ 是系统状态， $u \in R^{n_u}$ 是系统控制输入。如果 x_s 是设定点，则镇定问题是指依据某种控制理论，设计反馈控制输入，使系统 (1.1.1) 在该反馈控制作用下，起始于 x_0 的解可以收敛于 x_s ，即满足

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x_s\| = 0. \quad (1.1.2)$$

如果从应用问题的角度来看，镇定控制能够使被控对象达到其运动空间上的给定的参考点，并且可以稳定在该参考点或者该参考点的邻域内。

究其本质，设定点镇定问题属于调节问题，其典型应用有室内的温度控制、自动泊车和运动对象的指定位姿控制等。随着控制理论的发展和应用问题的广泛，出现了不能用镇定控制来解决的应用问题。文献 [1] 通过车辆自动驾驶的例子阐明了这一事实。文献 [1] 指出，如果用镇定控制解决车辆的自动驾驶问题，通常需要将控制问题解耦，分成两个镇定子问题：一个控制器通过将方向盘转角作为控制输入镇定侧向位移，另一个控制器通过油门开度镇定车辆行驶车速，即对车辆的纵向位移进行控制。然而，由于该解决方案的分解形式，在控制任务的解耦过程中，该方案的控制性能经常是受限制的。

同样对于车辆自动驾驶问题，如果不通过分解为两个子问题的解决方案，而是根据控制目标，首先离线计算车辆的参考运动轨迹 $x_r(t)$ ，然后再设计跟踪控制器，使车辆在某种控制输入的作用下，能够在线跟踪此参考轨迹，满足

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x_r(t)\| = 0. \quad (1.1.3)$$

此类控制问题被归纳为轨迹跟踪 (trajectory tracking)，简称为跟踪控制或 TT 问题。同样从应用问题的角度来看，轨迹跟踪能够使运动对象以一定的速度跟踪其运动空间上

给定的某条轨迹。在轨迹跟踪问题中，参考轨迹 $x_r : [t_0, \infty) \rightarrow R^{n_x}$ 在跟踪控制器发出控制动作前是离线计算好的，并且是时间 t 的显式或隐式函数，由于参考轨迹含有时间的信息，暗示着运动对象何时到达轨迹的何位置，因此对于运动对象来说，参考轨迹代表着已知的、清晰的控制需求。

对于车辆自动驾驶问题，如果既不依赖于分解为两个子问题分别镇定的方案，又不依赖于先进行轨迹规划再跟踪的解决方案，而是考虑自动驾驶问题的原始形式，将期望路径信息转换为一条以道路参数进行参数化的几何曲线，如式 (1.1.4)：

$$\mathbb{P} = \{r \in R^{n_x} \mid r = p(\theta)\} \quad (1.1.4)$$

其中 θ 是道路几何参数， $p : R^1 \rightarrow R^{n_x}$ 表示对期望路径 \mathbb{P} 进行参数化的函数映射关系，式 (1.1.4) 中的期望路径是一条不具备任何时域信息的几何曲线，此类运动控制问题称为路径跟踪控制 (path following)，又称作路径跟随或 PF 问题。路径跟踪问题的控制目标是，使被控运动对象在某种控制输入的作用下，能够跟踪如式 (1.1.4) 的几何期望路径，即满足

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - p(\theta(t))\| = 0. \quad (1.1.5)$$

路径跟踪问题与轨迹跟踪问题相比，控制器并不是预先知道期望路径的，因此待跟踪的几何期望路径需要在控制器中在线确定，而不像轨迹跟踪问题中的参考轨迹是在跟踪控制器发生控制动作前离线规划好的，路径跟踪解决方案从一开始就没有限制控制性能。

综上，点镇定问题要求被控对象从任意的初始状态能够稳定到任意的终止状态，轨迹跟踪要求被控运动对象跟踪与时间呈函数关系的轨迹，路径跟踪要求被控对象沿着给定的与时间无关的路径运动。从控制理论的发展角度来看，跟踪问题是以调节问题为基础发展而来的。当系统需要从一个设定点转移到另一个设定点，如果没有指定具体连续的转移轨迹，这样的问题被称作为设定点跟踪^[2, 3]，设定点跟踪问题被看作是镇定控制和跟踪控制的过渡问题。如果将设定点的阶跃变化看作是参考轨迹，设定点跟踪就是一个跟踪控制问题；如果将设定点的阶跃变化看作是导致设定点偏离的扰动，那么就按镇定控制来设计控制器。特别地，如果参考轨迹或期望路径是定义在状态空间或输出空间上一系列跟踪点的集合，那么跟踪问题可以转化设定点镇定问题 (调节问题) 来解决。

轨迹跟踪和路径跟踪问题都是使被控对象按照规划的轨迹航行，两者在名称上往往相互混淆，轨迹跟踪控制和路径跟踪控制的主要区别在于：

(1) 轨迹跟踪中的参考轨迹是一条以时间为参数的运动轨迹，系统的状态变量和控制变量通常表示为在时间轴上的函数关系，一旦运动的参考轨迹确定，具有时间属性的系统变量也都会被确定，例如系统的运动速度、加速度和力矩等，即被控对象沿

参考轨迹的运动形式是确定的。而路径跟踪中期望路径是一条静态几何曲线，在笛卡尔坐标系下期望路径通常表示成与被控对象的位姿之间的函数关系，期望路径的函数方程不包含时间参数，而是以道路参数进行参数化。

(2) 轨迹跟踪控制中的参考轨迹先由外部系统（又称作参考模型）离线生成，然后再由轨迹跟踪控制器在线跟踪。而路径跟踪控制中的期望路径是由路径跟踪控制器在线确定的，并不像轨迹跟踪中的参考轨迹那样高度依赖于额外的参考模型。在设计路径跟踪控制器时，由于道路参数受运动速度的影响，因此被控对象沿几何期望路径的运动速度是控制器设计的另外一个自由度，控制器的任务又可以归纳为保持被控对象在待跟踪的几何期望路径上，并且在线设计其参考运动速度。同轨迹跟踪相比，路径跟踪控制器需要同时实现期望路径的确定和控制被控对象的系统动态。

(3) 由于参考轨迹和期望路径的定义方式不同，轨迹跟踪问题中的跟踪误差对时间有严格的要求，而路径跟踪问题中的跟踪误差对时间没有这样的限制。路径跟踪控制器的首要任务是使被控对象到达并跟随期望几何路径，次要任务才是满足其他的动力学期望，例如以某些期望速度跟随期望路径。

Aguilar 等人指出，路径跟踪是一种应用更广泛的参考跟踪。这是因为如果道路参数 θ 为常量，即

$$\theta(t) = c, \quad \forall t \geq 0 \quad (1.1.6)$$

其中 c 是给定常数，则路径跟踪问题就可以归纳成设定点镇定问题。如果预先指定道路参数的时域法则，如式 (1.1.7)

$$\theta(t) = ct, \quad \forall t \geq 0 \quad (1.1.7)$$

则路径跟踪问题等价于轨迹跟踪问题。因此，设定点镇定和轨迹跟踪可以看作是路径跟踪问题的两个特例。同时基于路径参数变量 θ ，路径跟踪的期望几何路径有多种参数化形式，并且控制器可以结合虚拟输入优化道路参数的动态过程，这对于控制器设计来说有很大的灵活性，使得路径跟踪处于优势地位。例如，文献 [4] 对机器人支撑足关于地面的角度进行多样参数化，保证输出收敛于期望路径，实现了两足机器人稳定行走，多样参数化可以使下层系统的稳定性分析得到明显简化。

另外，在非最小相位系统的轨迹跟踪问题中，跟踪误差的 \mathcal{L}_2 范数能够达到任意小；而在最小相位系统的轨迹跟踪问题中，当信号频率接近不稳定零点时，跟踪误差会明显增加，控制性能变差，跟踪误差的 \mathcal{L}_2 范数最小化任务等价于最小化镇定偏差系统零动态的控制能量。同轨迹跟踪相比，路径跟踪可以通过控制道路参数 θ 的演化过程，将 θ 作为另一附加的控制输入来镇定不稳定的零点，使最小相位系统的跟踪控制性能避免受到限制 [5, 6]。文献 [7-9] 分别对非最小相位系统和最小相位系统的跟踪控制进行了研究，并详细说明了轨迹跟踪和路径跟踪在这两类系统中的性能差别。

根据以上三种运动控制问题的定义，以及它们之间的对比分析，设定点镇定、轨迹跟踪和路径跟踪问题具有不同的控制目标，需要设计不同的控制器。在控制理论中，即使三者各自的基本含义得到了业内的广泛认可，不同的文献对这三种运动控制问题依旧有不完全一致的名称。除此之外，由于被控运动对象的模型不同，问题的描述方式不同，系统所要达到的控制性能指标及其叙述方式不同，所用控制理论工具及其特点不同，无法给出设定点镇定、轨迹跟踪和路径跟踪各自统一并且严谨的数学定义，只能对此三种基本控制问题进行宏观上的概念归纳与区别。运动控制领域的研究人员需要结合运动对象的具体模型和所选择的控制方法给出所研究的运动控制问题描述和设计流程。

1.2 课题的工程意义

制造业是国民经济的支柱，是社会生产力的主体，是国家安全的根本，是国民生活 and 基本利益的保障，并直接反映一个国家的实体经济水平。图 1.1 是世界银行统计的我国制造业增加值变化曲线。自 2008 年以来，我国制造业增加值连续增长且幅值较大，迈入了制造大国的行列。然而，同发达国家相比，我国制造业“大而不强”，在整体水平和创新力方面依旧存在显著差距。

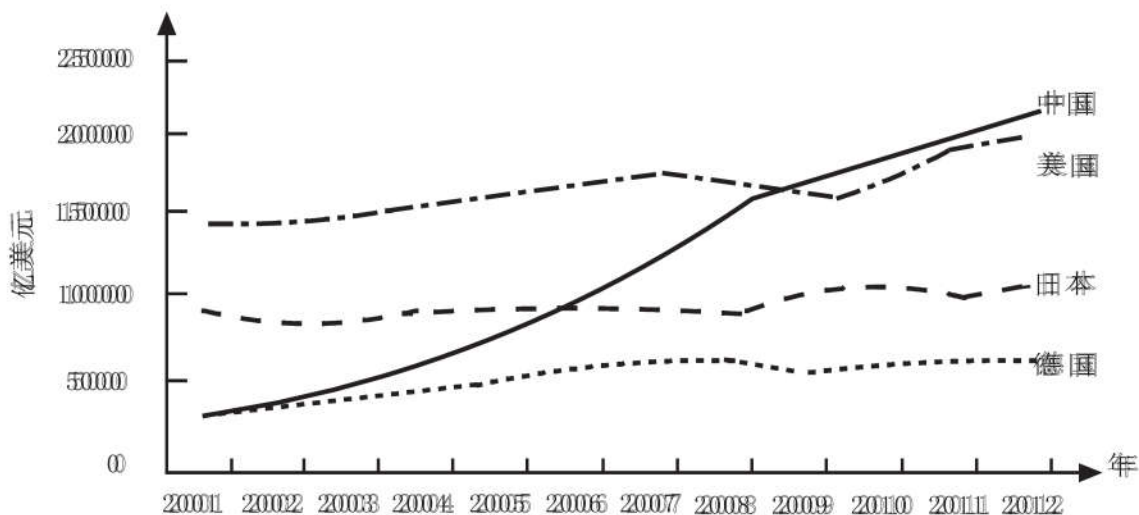


图 1.1 中国制造业年增加值

2015 年 10 月，为了实现我国制造行业“大而强”的转变，由国家制造强国建设战略咨询委员会发布的《中国制造 2025》重点领域技术创新绿皮书，以我国社会安全和社会经济发展的需求为中心，将新一代信息技术产业、高档数控机床和机器人、航空

航天装备、海洋工程装备及高技术船舶、先进轨道交通装备、节能与新能源汽车、电力装备、农业装备、新材料、生物医药及高性能医疗器械列为十大重点发展领域^[10]，切实保证利用十年时间，重点突破，使我国在2025年成为制造强国，并尽力争取达到国际先进水平。

在《中国制造2025》重点领域技术路线图中，十大重点领域各自的具体需求、最终目标、重点产品和关键技术等内容都有详细的介绍与描述。其中，路径跟踪控制广泛存在于十大重点领域范畴内，尤其是在高档数控机床和机器人、航空航天装备、海洋工程装备及高技术船舶、先进轨道交通装备、节能与新能源汽车五个领域内尤为突出。切实解决路径跟踪问题的关键技术，可为上述五个领域的相关需求和研发提供支持保障，对于提高我国制造产业的自主创新能力来说，是至关重要的部分。

1. 高档数控机床和机器人

数控机床(Computer Numerical Control Machine, CNC)内装有程序控制系统，该控制系统能够根据内置的程序发出多种控制信号，按照图纸上产品尺寸和形状的信息，自动加工多种复杂和精密的零件。高档数控机床除具备普通机床的自动化特点，还具备高速、高精度、多轴联动和网络通信等功能，是高水平机电一体化的典型组成部分。高档数控机床对金属工件主要进行切削、铸锻、焊接和装备等加工，为航空航天、电子通讯、汽车轮船和工农业机械等重要产业提供装备零部件，为适应这些重点产业的发展需要，高档数控机床全新的开发热点如下：高精度跟踪参考进行磨削，快速加工与成型，根据加工进度自动上下料，在线检测与装备，由数字化转向智能化。文献^[11]对五轴联动机床提出了一种新的伺服控制方法，伺服控制器首先对跟踪偏差和跟踪滞后偏差进行了估计和计算，然后采用比例控制减小偏差，实现了五轴刀具路径的跟踪控制。

具备信息控制的机器人种类繁多，按工作环境分类主要有：(1)服务于制造环境下的工业机器人，主要负责生产线的物料搬运，焊接，装配和监测，还有能够灵活安全作业的通用机械臂和多自由度机器手；(2)应用于非制造环境下的家用和商用机器人，广泛应用于养老助残，家政清洁，教育娱乐和消费服务等方面；(3)从事于特殊环境和极端环境下的专业机器人，如两轮自平衡车和仿生飞行器，它们在军事侦察，扫雷排险，救灾救援，能源安全，防核化污染等方面发挥着重要作用。然而，在以上这些机器人的应用中，实质上大部分都属于路径跟踪控制问题的范畴。

机器人产业的快速发展，有利于提高人民生活质量，可以促进工业生产，并更好地服务于社会活动和国产建设。在2025年，我国希望具有成熟完善的机器人产业结构，在机器人系统研发、系统集成和技术水平方面实现重点突破，并在国内机器人市场全面推广自主品牌，国产装配、喷涂、加工、检测机器人在汽车，家具、船舶，航

空航天, 电气电子等行业实现批量生产与应用, 并起到一定规模的示范效应。

目前, 智能机器人亟需的关键技术主要包含以下几个方面: 基于智能传感器的智能控制技术, 视觉识别与定位应用技术, 非结构环境下的移动作业机器人的导航与定位技术, 动态不确定环境下机器人操作定位误差补偿技术, 多机器人网络化和集群协调控制技术。新的需求体现出机器人应从辅助的角色向自主移动和认知功能发展, 将人机交互能力提升到更好地融入人类生产生活环境, 与人类协同作业, 并逐步提高对动态环境适应能力, 具备优良的控制品质, 工艺上个性化, 性能上智能化。

移动机器人 (mobile robot) 相对于固定机器人更强调其移动特性, 因此在移动机器人的技术研究中, 定位和导航技术是移动机器人运动控制领域的研究热点。移动机器人需要结合自身系统的传感器感知当前姿态和所处的外部环境信息, 并对反馈回的信息和数据进行存储和处理, 然后再由机器人的跟踪控制系统实现移动机器人的最优路径计算和路径跟踪控制, 并结合具体的控制需求, 同时使机器人进行其他相关的作业操作。文献 [12] 基于全球定位系统 (Global Position System, GPS) 对存在滑行运动的类车式移动机器人的路径跟踪问题进行了研究, 具体思路是采用实时动态 GPS 和其他辅助传感器采集机器人的位姿、速度信息, 以及滑行时的扰动信号, 利用反步法设计控制器对路径跟踪偏差进行了补偿控制。文献 [13] 采用视觉伺服系统研究了非完整移动机器人的运动控制, 同时采用自适应技术补偿摄像参数不确定性, 同时保证了跟踪误差的收敛性。

2. 航空航天装备

一个国家的航天能力事关国家战略利益与安全, 是衡量国家综合国力的重要指标之一, 而航天装备水平正是象征航天能力的中心体现。航天装备主要包括传送车、牵引车、版拖车、电源机组等地面设备以及运载卫星、火箭、相关探测器等飞行器。高精度新型导航卫星自主定轨和自主导航与控制是深空探测的关键技术, 是实现卫星其他功用和完成深空特殊环境探测的基础。

飞机是国民交通出行和货物空中运载的重要工具, 近年来我国航空运输业持续保持高速增长, 国家对航空领域管理机制的改革和低空空域的开放, 极大地刺激了飞机制造业的发展, 同时也带来了广阔的市场空间。飞机制造业的重点产品主要有飞控系统和航电系统。飞控系统, 即主飞行控制系统, 是实现主飞控和自动飞行的重要保障, 同时具有高升力一体化系统综合的能力。而航电系统是综合导航系统, 集成卫星导航和无线电导航功能。提高综合飞行控制系统技术和航电系统设备的可靠性, 对改善自主飞机品牌的性能、提高航空工业竞争力、实现航空产业创新具有重要的意义。在《中国制造 2025》重点领域技术路线图中明确指出, 为满足无人机在边疆巡察、治安反恐、农林牧渔喷洒作业、摄影娱乐、舆图勘测、管线监测等各种应用需求, 在

下一个十年应重点开发不同等级的固定翼和旋翼无人机,突破微型任务载荷、自主导航、自适应控制、认知与规避、高可靠通信、适航及空域管理等关键技术,逐步提高无人机的可靠性和安全水平。文献 [14] 讨论了非线性系统的跟踪控制和行为调节,并将研究成果应用于航空器在竖直起飞和降落中的飞行控制,对解决飞机运动控制中的航空气调度问题有借鉴意义。文献 [15] 考虑了非线性空间飞行器的姿态跟踪控制和干扰抑制问题,所设计的抛物型开关控制器使喷气执行机构的安装方式具备多样性。

3. 海洋工程装备及高技术船舶

随着我国航运业和造船业的繁荣发展,海上交通同陆地交通一样繁忙,航道及港口同样存在拥堵问题,大大增加了船舶碰撞、搁浅和触礁等海上事故的发生率,因此提高对船舶的操纵能力和控制品质成为了迫切需求,海洋工程装备及高技术船舶应向大型化、智能化、高速化和专业化方向全面发展。另一方面,深海资源开发,海洋能利用,海上工厂,海底隧道,海岸防护工程等专业海上作业也需要精确的船舶运动控制,才能满足实际工程的需求。科学地操纵船舶,使其能在复杂和动态的环境中安全地到达目的位置,是船舶运动控制的关键核心技术。高技术船舶运动控制包括船舶的自动靠离泊、自主导航和自动避碰等问题,其中自主导航问题包括对船舶的航向、航迹和航速控制。另外,提高海洋作业装备深海锚泊及动力定位控制系统的能力,是实现船舶产业化应用不可或缺的手段。

在控制理论中,根据运动控制系统位姿空间维数和控制输入维数之间的对应关系,将运动控制系统分为全驱动系统和欠驱动系统。文献 [16] 采用李亚普诺夫直接方法设计跟踪控制器,并基于干扰观测器在控制输入中加入等效补偿来抑制环境干扰,实现船舶对给定目标的跟踪运动控制。文献 [17] 为欠驱动船舶的轨迹问题设计了半全局渐进稳定控制器。

4. 智能汽车与智能交通系统

智能交通系统 (Intelligent Transport System, ITS) 将通信与电子技术融合到交通设施和车辆中,并且利用网络通信技术将一系列载有信息控制的自动交通系统组合到一起,从而改变人民出行模式,进一步更好地为人民生活服务。打造智能交通系统的意义在于可以有效地缓解交通拥堵问题,提高社会和交通效率,减少能源消耗和环境污染,并且在很大程度上可以减少人为型交通事故发生率和事故死亡人数,提升交通安全。同时,智能交通系统是科技革命的新兴产业,可以有效促进汽车、电子、通信和服务等产业联合发展。智能交通系统的战略重点在于实现车联网和推进车辆自动化 [18]。车联网技术可以有效地对智能系统内的车辆、设备、基础设施和人类之间的数据信息进行收集管理、转换传输、融合储存以及分享运用。而自动化技术可以协助或代替驾驶员对车辆进行控制,并提供基于互联网的智能引导和控制信息。

智能车辆 (Intelligent Vehicle, IV) 是活跃于智能交通系统中不可或缺的部分, 它的主要任务分为环境感知、规划决策、自动行驶和底层控制, 精确有效的路径跟踪更是实现自主行驶的关键^[19]。智能车辆的自动驾驶分为四个等级, 即驾驶辅助, 部分自动驾驶, 高度自动驾驶和完全自动驾驶。目前在驾驶辅助方面, 自适应巡航控制、自动泊车、自主起停和电子稳定控制等系统已经在汽车中广泛应用。探究自动控制技术, 为智能车辆的集成控制系统设计控制器, 实现对车辆各子系统的精确控制及协调控制, 对满足智能车辆相关的交通需求具有重大意义。

文献^[19]对具有自动驾驶功能的智能车体系结构进行了详细的介绍和深入的研究, 涵盖了智能车的纵向运动控制、横向运动控制和底层控制的软、硬件设计, 并对智能车及其路径跟踪关键技术的研究进展和成果进行了全面的回顾和讨论。文献^[20]采用环形预瞄法 (Circular Look-Ahead, CLA) 设计了转向控制器, 并在控制结构中集成了速度控制算法, 确保车辆能够跟随期望路径, 所提出的控制算法能够明显减小车辆在转弯过程中出现的路径跟踪偏差, 环形预瞄控制算法的实质是将跟踪角度偏差转换为距离偏差。

综上, 路径跟踪问题广泛存在于我国制造产业的重点领域中, 如移动机器人的运动控制, 智能车自动驾驶, 数控机床的跟踪磨削, 以及飞机和轮船的航迹控制等方面。除此之外, 一些过程控制问题同路径跟踪问题的结构极为相似, 如结晶过程的过饱和控制^[21], 其控制目标是控制结晶反应釜温度尽可能地跟踪溶解度曲线。对路径跟踪问题进行深入研究, 不仅具有重大的工程意义, 而且与国民的生产生活息息相关。

1.3 课题的研究现状

现存的科研成果中, 相当多的文献深入研究了设定点镇定和轨迹跟踪控制问题。在此基础上, 对路径跟踪控制问题的探索得到了长足的发展。本文主要讨论非线性系统的路径跟踪问题, 因此不对设定点镇定和轨迹跟踪问题的研究历程和研究成果进行梳理和总结, 这一部分内容可具体参照文献^[22, 23]中的研究现状综述。追踪路径跟踪问题研究的起源, 直到上个世纪九十年代路径跟踪问题才被广泛关注^[24, 25]。经过近二十年的发展, 从经典控制中线性系统的时域和频域分析方法, 非线性控制中先进的微分几何工具, 再到现代控制理论中的先进控制技术和智能控制方法, 多种各具特性的控制方法被应用于路径跟踪控制问题中。再结合所研究的运动控制对象类型的不同、所讨论的控制系统建模方式的差别、是否考虑外界干扰、是否考虑运动状态的约束和执行机构的限制条件等, 大量的文献对运动控制中的路径跟踪问题进行了阐述, 下面简要回顾路径跟踪问题的控制方法。

1. 前馈控制方法

早期基于优化方法的路径跟踪问题的解决思路，是在考虑控制输入约束的前提下，计算合适的前馈控制，如文献 [24]。这是因为在路径跟踪的实际应用中，在给定的几何参考曲线上，运动控制对象的执行机构的动作应当足够精确和迅速。前馈控制方法主要依赖于运动控制系统是全驱动的，被控对象具有可逆的动力学模型，或者依赖于系统模型的微分平坦性，这使前馈控制常常应用于平坦机械系统中。因此，基于前馈控制的路径跟踪方案的应用受到了限制。文献 [26] 对机器人的路径跟踪问题进行了凸优化设计，期望路径定义在平坦输出空间上，设计了时间最优的前馈控制，使机器人在最短的时间内准确跟随期望路径。为保留前馈控制动作的快速性，后期涌现的文献经常将前馈控制同其他反馈控制方法相结合。例如，文献 [9] 设计的跟踪控制器就包含了前馈控制和静态状态反馈两部分，求解非因果系统的逆问题获得前馈输入，基于线性二次型调节器 (Linear Quadratic Regulator, LQR) 获得常值状态反馈增益，保证了控制系统对期望路径的一致渐进收敛性。

2. 反馈线性化

泰勒级数展开是一种局部近似方法，也是一种传统的线性化方法，由于该方法舍弃了高阶非线性项，直接影响了非线性系统的控制品质。因此，精确反馈线性化方法引起了广泛关注。文献 [27-30] 对路径跟踪问题的解决方法是通过微分同胚方法和合适的状态反馈将相关系统的动力学和路径参数映射到新的坐标系中。新的坐标系对每一个输出都包含无限维的积分链。微分同胚和输入输出线性化状态反馈的推导是可逆反馈线性化的关键步骤，如果能够实现该设计步骤，那么保证路径收敛性和零动力学的有界性的任务将会得到明显简化。上述文献的本质是将路径跟踪问题通过坐标变换分解为两个子问题来解决的。在合适的坐标变换下，设计两个控制器分别镇定可逆动力学模型和内部动力学模型。文献 [27] 对这种方法加以调整使之适应于机械系统，文献 [28] 将这种方法应用于磁悬浮系统中。文献 [29] 利用了输入输出反馈线性化并关注了状态反馈的存在性问题。文献 [30] 在反馈线性化方法中结合了级联控制技术，重新定义系统输出，讨论了欠驱动船舶的转向点跟踪问题。文献 [31] 利用微分同胚变换和李雅普诺夫直接法获得参考横摆角和参考速度，控制船舶的航向，实现了跟踪任意曲线的控制目标；通过在船舶模型中加入横向速度项使船舶能够低速和高速航行。在后续文献 [32] 中，将 Leader/Follower 控制结构同文献 [31] 提出的跟踪控制方法相结合，实现了欠驱动船舶的队形跟踪控制。

3. 反步法/李雅普诺夫方法

反步法 (Backstepping) 将李亚普诺夫稳定性分析方法与控制器的设计相结合，对复杂的非线性系统而言，反步法是一种有效的回归设计方法，其设计过程如下：首先将

非线性系统分解为一系列子系统，然后针对每一个子系统选取李亚普诺夫函数，获得子系统的虚拟控制律。采用积分环节串联起来的各个子系统都有相似的设计流程，从最低阶次的子系统开始设计虚拟控制律，将上一个子系统的虚拟控制律作为当前设计的子系统的跟踪目标，以此类推，一步一步设计满足要求的虚拟控制，最终获得整个闭环系统的实际控制律。在此设计过程中，上级子系统通过下级子系统的虚拟控制逐级稳定，从而逐步地保证了整个闭环系统的收敛性。

路径跟踪问题可采用经典的反步法解决。文献 [33, 34] 将 Backstepping 算法应用到最小相位系统中，并得到了进一步研究。文献 [35] 通过引导角构造角度跟踪误差，运用反步法设计了路径跟踪控制器，使侧向跟踪误差和角度跟踪误差同步收敛，解决了非完整轮式移动机器人的路径跟踪问题，并确定了期望路径参数在线的更新方式。反步法的主要优点是可以保留系统中有价值的非线性部分，整个控制器设计的过程具有灵活性。同时，反步法是一种能够考虑参数不确定性的控制器综合方法，很多文献以反步法获得了路径跟踪问题的自适应控制，如文献 [36]。在实际的船舶运动控制中，存在风和水流等不可避免地外界干扰，再加上船舶运动本身是具有惯性和时滞性的非线性系统，存在建模误差以及由船舶载荷变化导致的参数摄动，这些不确定性会影响控制系统的性能品质。对此，文献 [37] 用李亚普诺夫函数的递推设计方法对自动舵的控制器加以设计，同时在该方法中采用了 \mathcal{L}_2 范数性能指标与神经网络技术，在控制量舵角的设计中加入辅助控制输入，对外界干扰和建模误差加以补偿，保证了闭环系统的跟踪性能和鲁棒性能。文献 [38] 应用反步法，提出了一个自适应鲁棒跟踪控制器，该全局控制器可以使闭环系统的所有状态渐进地跟踪给定期望轨迹，解决了带有不确定动态的移动机器人的跟踪控制。文献 [39, 40] 同样基于反步法针对存在参数不确定性的移动机器人提出了自适应跟踪控制。

4. 滑模控制

滑模控制 (Sliding Mode Control, SMC) 又称为变结构控制，其设计思想是根据控制系统的期望性能设计一个适当的滑模面，滑模控制器将系统状态从滑模面外驱动到切换滑模面上，系统状态一旦到达滑模面上，控制输入将保证系统沿滑模面到达系统的原点。设计滑模控制器的关键是根据系统的特性和参数确定滑模面以及如何同其他控制方法相结合 [41]。因为闭环控制系统的参数和性能只依赖于所设计的滑模面，使得闭环系统具有良好的动态性能以及鲁棒性，因此滑模控制本质上属于非线性鲁棒控制方法，并为存在模型误差和外部干扰的非线性系统提供了保证稳定性的系统化方法。

文献 [42, 43] 在极坐标系下定义机器人的位姿向量并选取合适的滑模面镇定位姿向量，设计滑模控制律实现了移动机器人对期望参考路径的跟踪。文献 [44] 将神经网络同滑模控制相结合，为存在外界干扰和参数不确定性的欠驱动船舶设计了鲁棒控制

器, 该控制器侧重于对船舶的纵向运动控制, 具体思路是根据纵向速度和艏摇角的参考值, 将路径跟踪问题转换为纵向速度和艏摇角的误差镇定问题, 从而实现船舶的路径跟踪控制。文献 [45] 基于期望逆系统和滑模控制实现了航天器的位姿跟踪控制, 讨论了航天器编队飞行的多目标跟踪控制, 依据跟踪过程中的角速度约束和姿态角约束, 得到主航天器的参考位姿、角速度和角加速度, 主航天器通过相机对目标位置进行跟踪, 主航天器的机动天线负责与从航天器通信, 实验结果说明了控制器具有良好的跟踪性能和鲁棒性能。滑模控制器在设计过程中的重点是如何抑制由切换带来的系统抖振。文献 [46] 基于自适应技术在线调节控制增益, 构造合适的边界层条件来抑制滑模控制器的高频抖振, 实现智能小车对参考路径的跟踪控制。

5. 模型预测控制

在现存的路径跟踪文献中, 无论是操纵单独的运动控制对象还是解决多运动体的运动控制问题, 基于非线性反馈的李亚普诺夫方法都是主要的控制器设计技术。例如, 文献 [47] 对欠驱动的自主车辆提出了监督自适应控制, 就是基于非线性李亚普诺夫函数跟踪控制律解决了位置跟踪误差的全局有界性和收敛性问题。但基于李亚普诺夫函数的控制方法不能以一种结构化的方式考虑约束条件, 虽然文献 [48] 在研究多机器人的路径跟踪问题时, 对给定的几何路径给出了相应的协调机制, 基于李亚普诺夫函数的控制律也能够清晰地考虑双向通信约束, 但是受限于期望路径和约束的形式, 文献的结论推广到一般路径跟踪问题中的适用性是受到制约的。

模型预测控制不仅可以处理具有非线性动态的控制问题, 还具有滚动优化和反馈校正的控制机制。另外, 模型预测控制算法的固有内在特性和创新之处就是可以处理存在约束的控制问题, 正可以弥补基于李亚普诺夫函数的控制等方法的不足。文献 [49] 对欠驱动的自主车辆的轨迹跟踪和路径跟踪问题分别设计了两个模型预测控制器, 并且考虑了控制输入约束, 但还需要额外的非线性辅助控制律来保证跟踪误差的收敛性。文献 [50] 将非线性模型预测控制 (Nonlinear Model Predictive Control, NMPC) 应用于蛇形机器人的路径跟踪问题中, NMPC 相比于线性 MPC 的优点是: 直接使用被控对象的非线性模型, 因此对系统的动态行为可以作更加准确的预测, 从而对控制问题达到更好的优化。文献 [50] 基于 NMPC 设计闭环系统时只考虑了直线路径, 并且没有研究闭环系统的稳定性, 在优化问题求解的过程中采用很长的滚动时域来保证 NMPC 算法对直线路径的收敛性, 这无疑会加重计算负担。

现存的路径跟踪 NMPC 方法通常使用终端约束和终端惩罚或者收缩约束获得路径收敛性, 例如文献 [51, 52], 一般带有这些约束条件的优化问题在线求解时间长, 并且系统参数选择不合理还会导致无解。同这些方法相比, 文献 [53] 在不使用上述约束的前提下, 针对精确反馈线性化系统提供了保证路径收敛性的充要条件, 但此充要条件

依赖于可控性假设，文献 [53] 的另外一个挑战是如何保证优化问题的可行性。综上，应用 NMPC 求解路径跟踪控制问题的热点研究是如何保证 NMPC 算法对期望路径的收敛性、优化问题的可行性以及应用于实际问题的实时性。文献 [54] 采用文献 [53] 中的 NMPC 算法，基于文献 [55] 提出的自动实时迭代算法研究了工业机械臂路径跟踪控制的物理实现，在算法的实时性上取得了显著地突破。

路径跟踪问题中的期望路径有两种定义方式，一种是定义在状态空间上，一种是定义在输出空间上，因此又分为状态路径跟踪和输出路径跟踪。相比于状态路径跟踪，因为实际的路径跟踪问题，如机器人、自主车辆和无人机的运动任务更多地定义在输出空间上，输出路径跟踪具有更广泛的适用性。因此，文献 [56] 基于 NMPC 控制结构对输出路径跟踪问题进行了研究，文献 [57, 58] 讨论了 NMPC 控制结构的物理实现问题。

结合以上内容，设定点镇定、轨迹跟踪和路径跟踪三大问题的理论研究日臻成熟，并且涌现出的许多路径跟踪算法，在特定的被控对象中能够有较好的表现，但是还缺乏适用于不同运动对象的路径跟踪算法和设计指导原则。随着移动机器人、机械手、自动驾驶车辆、船舶和飞行器操纵等领域的不断发展，以及对机械系统和非完整约束系统开发的不断深入，人们对各领域的运动控制技术的要求越来越高。对运动控制中的路径跟踪及其分支问题进行深入研究，不仅可以满足多领域对运动控制技术越来越高的要求，还可以为适用于不同被控对象的路径跟踪算法的设计提供相应的指导原则。

1.4 本文的主要研究内容

综上所述，路径跟踪问题广泛应用于（汽车、轮船、飞机等的）轨迹控制、移动机器人的运动控制和结晶反应釜等方面。相应地，学者提出了许多不同的路径跟踪控制方案。例如前馈控制和融汇各种控制技术的反馈控制方法，然而这些控制方法或者适用于具体的系统，或者依赖于具体的系统特性，例如微分平坦性和无源性，并且这些控制器不曾考虑系统的状态约束或输入约束。除存在系统约束之外，实际的路径跟踪问题的本质还具有非线性和时变性，因此对于路径跟踪问题很难设计控制器。由于 NMPC 具有前馈反馈控制结构，可以显式处理约束，能够对多目标和多变量进行优化，所以本课题拟采用 NMPC 对路径跟踪问题进行研究。

从控制系统的理论角度分析，对含有被控对象在内的闭环控制系统的研究应该包含控制系统分析和控制系统综合两部分内容。在进行这两部分工作之前，应该首先获得被控对象的数学模型和相应参数。对被控对象建模的基本方法有机理建模法和实验

建模法,前者是基于实际系统的运行机制直接运用物理原理,写出各种平衡方程来对系统的动态过程进行数学描述,后者是将实验中的输入和输出实测数据按照相应的处理方法导出被控对象的数学模型。控制系统分析是研究系统对给定输入的运动规律,包括系统的定性分析(如运动稳定性、能控性和能观性等)和已知系统输入求其输出的定量分析两大方面,属于认知系统的层面;控制系统综合又称为控制系统设计,主要根据系统期望的运动形式或性能指标,研究改变系统运动规律的方法,属于改造系统的层面^[59]。因此,完整的闭环控制系统设计按照研究的顺序应该包含问题描述、建立被控对象数学模型、对数学模型进行分析、依据控制目标设计控制器、闭环控制系统稳定性分析、仿真说明控制方案的可行性。本文按照以上控制系统设计的步骤研究了非线性系统的模型预测路径跟踪控制,具体的工作和安排如下。

第一章 在设定点镇定和轨迹跟踪的基础上首先给出了路径跟踪问题的理论背景,并对轨迹跟踪问题和路径跟踪问题进行了对比和区别。然后,结合《中国制造2025》重点领域技术创新绿皮书,阐述了路径跟踪问题的工程意义,并为存在路径跟踪问题的各个领域列举出相关研究文献。最后一部分是对路径跟踪问题的研究成果进行了梳理和总结。

第二章 本文主要研究了非线性系统的路径跟踪问题,轮式移动机器人是非线性约束系统的典型代表,因此本章基于离散时间非线性系统对路径跟踪问题进行描述后,推导了轮式移动机器人的运动学模型和偏差状态动力学方程,将其选择为本文的运动控制对象,确立了控制任务。

第三章 由于NMPC具有显式处理约束和非线性动态的能力,所以本文采用NMPC方法来解决具有非线性和时变性的路径跟踪问题。本章首先提出了基于终端不等式约束的NMPC方案,此部分内容包括开环优化问题具体的数学形式、程序求解步骤和终端要素的确定方法,同时给出了算法的可行性和收敛性理论分析。稳定性研究一直是NMPC的研究热点。目前,采用合适的终端惩罚函数、终端域和终端控制器是保证准无限时域NMPC稳定性的主流手段,并且准无限时域NMPC的计算负担与终端域的选取形式有关,因此本章又介绍了基于终端等式约束的NMPC方案。最后在相同工况条件下,将两种控制方案应用于轮式移动机器人的路径跟踪问题中。各测试路径下的仿真结果和计算时间具体体现了非零终端NMPC和零终端NMPC在系统动态和计算负担方面的不同特点。

第四章 由于期望路径是实时变化的,路径跟踪问题的本质具有时变性。无论是基于非零终端的NMPC还是基于零终端NMPC,究其本质它们的终端域都是固定形式的,在整个优化问题求解的过程中是保持不变的,这对于求解时变的路径跟踪问题而言具有保守性。另一方面,第三章的仿真结果表明,非零终端NMPC控制方案不能

解决非光滑路径的跟踪问题，而零终端 NMPC 控制方案计算负担重，在线求解时间长，在现行的硬件结构下，无法应用于实际系统。因此，本章在第三章的基础上，提出了改进算法—基于时变终端不等式约束的 NMPC 方案和基于分段终端不等式约束的 NMPC 方案，并通过仿真实验说明了两种方案的有效性。

第五章 对全文的研究内容进行了总结，对未来的工作计划予以概括和介绍。

第2章 轮式移动机器人的路径跟踪问题

本章首先基于离散时间非线性系统对路径跟踪控制进行了问题描述。轮式移动机器人是非线性约束系统的典型代表，本文将 Unicycle 型移动机器人选择为运动控制对象，推导并建立了轮式移动机器人的运动学模型，然后对其路径跟踪控制任务进行了归纳。本章内容是后文路径跟踪控制器设计的基础。

2.1 路径跟踪问题的描述

考虑离散时间非线性系统

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k), \quad k \in I_0, \quad (2.1.1)$$

其中 I_0 是非负整数集， $x_k \in R^n$ 和 $u_k \in R^m$ 是 k 时刻的系统状态和输入。非线性函数 $f: R^n \times R^m \rightarrow R^n$ 是关于 x_k 和 u_k 局部 Lipchitz 的，系统状态和输入的约束由集合 X 和 U 描述如下：

$$x_k \in X, \quad u_k \in U.$$

假设 1: $U \subseteq R^m$ 是紧集和凸集，且包含原点。 $X \subseteq R^n$ 是连通闭集且包含原点。

路径跟踪问题的控制目标最直观的理解是使系统状态 x_k 跟踪一条参数化期望路径，本文中的期望路径 \mathbb{P} 是通过标量 θ_k 定义在状态空间上的

$$\mathbb{P} = \{r_k \in R^n \mid r_k = p(\theta_k)\}. \quad (2.1.2)$$

映射 $p: R^1 \rightarrow R^n$ 是二阶连续可微函数，变量 $\theta_k \in \Theta \subseteq R^1$ 不是先验已知的，但沿着期望路径由虚拟输入 v_k 控制

$$\theta_{k+1} = g(\theta_k, v_k), \quad v_k \in V \subseteq R^1, \quad (2.1.3)$$

其中 Θ 和 V 是紧集。

假设 2: 期望路径 \mathbb{P} 包含在系统的状态约束集中，即 $\mathbb{P} \subseteq X$ 。

假设 3: $g: R^1 \times R^1 \rightarrow R^1$ 是关于 θ_k 和 v_k 局部 Lipchitz 的。对于所有的 $v_k \in V$ 和 $\theta_k \in \Theta$ ， $g(\theta_k, v_k) > 0$ 。

定义偏差状态为

$$\tilde{x}_k := x_k - p(\theta_k). \quad (2.1.4)$$

则偏差状态动力学方程为:

$$\tilde{x}_{k+1} = f(x_k, u_k) - \frac{\partial p}{\partial \theta_k} g(\theta_k, v_k). \quad (2.1.5)$$

路径跟踪问题可以被归纳如下:

问题 2.1: (路径跟踪问题)

考虑系统 (2.1.1), 设计控制器使得:

- (1) 路径收敛性: 系统状态 x_k 能够收敛于期望路径, 即满足 $\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{x}_k = 0$ 。
- (2) 约束满足: 对于任意时间 k , 系统的状态和输入一直满足状态约束和输入约束, 即 $x_k \in X, u_k \in U, \theta_k \in \Theta, v_k \in V$ 。

重新定义偏差状态动力学模型的控制输入 $\tilde{u}_k \in \tilde{U} \subseteq R^m$ 和函数 $F(\cdot, \cdot)$, 式 (2.1.5) 可被改写为:

$$\tilde{x}_{k+1} := F(\tilde{x}_k, \tilde{u}_k). \quad (2.1.6)$$

假设 4: 当偏差状态 \tilde{x}_k 等于零时, 存在容许输入 $u_k \in U$ 和 $v_k \in V$, 使系统状态 $x_k \in X$ 和道路参数 $\theta_k \in \Theta$ 满足 $\tilde{x}_{k+1} = 0$ 。

2.2 轮式移动机器人的运动学模型

轮式移动机器人的结构形式多种多样, 文献 [60] 详细介绍了轮式移动机器人的机械结构形式以及它们各自的优缺点。由于多种类型的轮式移动机器人运动学模型都可转化成 Unicycle 模型, 因此 Unicycle 机器人模型具有广泛的代表性 [61]。

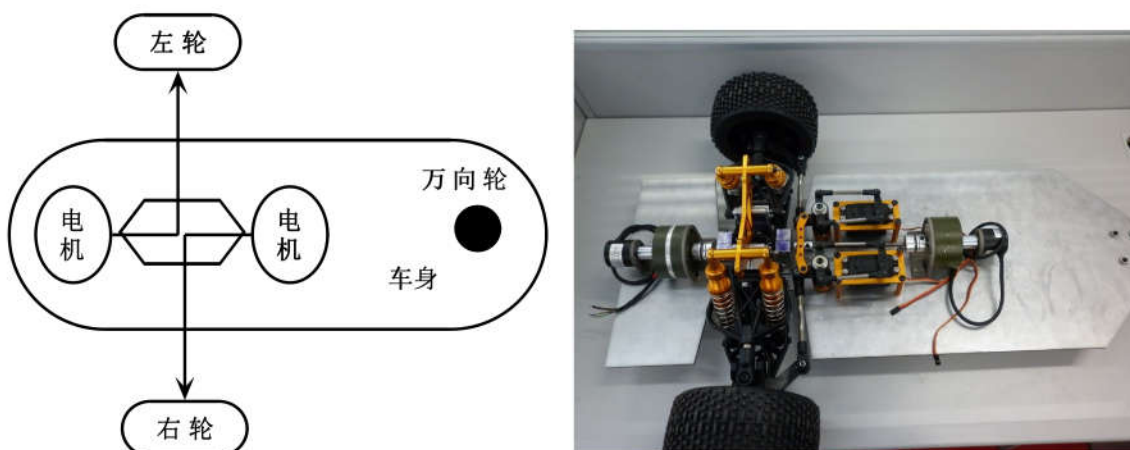


图 2.1 轮式移动机器人的简化模型与实物图

本文中，存在路径跟踪任务的轮式移动机器人是 Unicycle 型移动机器人，它由两个独立驱动后轮和一个万向轮构成，如图 2.1 所示。电机通过一级减速直接驱动车轮，实现动力传递。通过单独控制车轮的转速，可以实现移动机器人的转向。随动的万向轮起到保持车身平衡的作用，并且它能够水平 360 度旋转，可以驶向任意方向。这种结构的轮式移动机器人机械部分简单，运动形式更加灵活可控，通过性能更好。

在大地坐标系下给出移动机器人的简化模型和待跟踪的期望路径，如图 2.2，图中相应的符号定义见表 2.1。

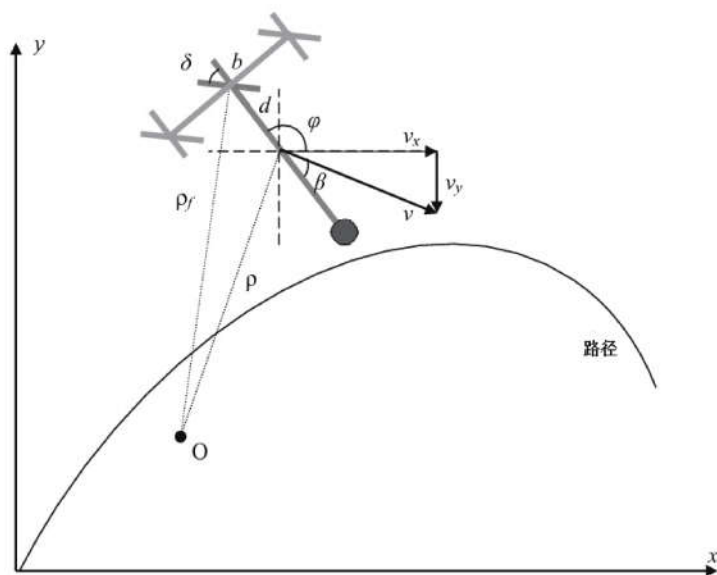


图 2.2 大地坐标系下的轮式移动机器人

表 2.1 符号定义描述

参数	符号	参数	符号
前轮轮距	$2b$	质心与前轮垂直距离	d
车轮半径	r	小车瞬心	O
瞬心到前轮距离	ρ_f	瞬心到质心距离	ρ
小车质心合成速度	v	质心侧偏角	β
横摆角（位姿角）	φ	左轮轮速	w_l
前轮转向角	δ	右轮轮速	w_r

根据图 2.2 中的几何关系，瞬心到前轮的距离和小车的瞬时转弯半径为：

$$\rho_f = \frac{2b}{\omega_r - \omega_l} \frac{\omega_r + \omega_l}{2} = \frac{\omega_r + \omega_l}{\omega_r - \omega_l} b \quad (2.2.1)$$

$$\rho = \sqrt{(\rho_f \sin \delta - d)^2 + (\rho_f \cos \delta)^2}. \quad (2.2.2)$$

轮式移动机器人的横摆角速度

$$\dot{\varphi} = \frac{\frac{\omega_r + \omega_l}{2} r}{\rho_f} = \frac{r}{2b} (\omega_r - \omega_l). \quad (2.2.3)$$

因此，质心合成速度为

$$v = \rho \dot{\varphi} = \frac{r}{2b} (\omega_r - \omega_l) \sqrt{(\rho_f \sin \delta - d)^2 + (\rho_f \cos \delta)^2}. \quad (2.2.4)$$

机器人的运动状态由向量 $(x, y, \varphi)^T$ 描述， x, y 分别表示机器人在大地坐标系下的纵向位移和侧向位移，代表机器人的位置信息。横摆角 $\varphi \in [-\pi, \pi]$ 代表机器人的位姿信息。结合如上的几何参数、位姿参数和控制量之间的关系，采用现代控制理论中的状态空间描述方法，移动机器人的动力学模型如下：

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \cos(\beta + \varphi) \\ v \sin(\beta + \varphi) \\ r \cdot (\omega_r - \omega_l) / 2b \end{bmatrix}, \quad (2.2.5)$$

其中 $\beta = \arctan \frac{\rho_f \sin \delta - d}{\rho_f \cos \delta}$ 。

为了验证所提出的机器人模型的有效性，考虑前轮转向角为零的情况。当 $\delta = 0$ 时

$$\begin{cases} \sin \beta = \frac{d}{\rho} \\ \cos \beta = \frac{\rho_f}{\rho} \\ v = \frac{\rho}{\rho_f} \frac{(\omega_r + \omega_l)}{2} r \end{cases} \quad (2.2.6)$$

结合三角函数和式 (2.2.6)，得出

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\cos \varphi}{2} r (\omega_r + \omega_l) - \frac{\sin \varphi}{2b} r d (\omega_r - \omega_l) \\ \dot{y} = \frac{\sin \varphi}{2} r (\omega_r + \omega_l) - \frac{\cos \varphi}{2b} r d (\omega_r - \omega_l) \\ \dot{\varphi} = \frac{r}{2b} (\omega_r - \omega_l), \end{cases} \quad (2.2.7)$$

式 (2.2.7) 与文献 [62] 中的前轮不转向的移动机器人运动学方程一致。

运动方程 (2.2.5) 过于复杂，如果根据轮速 w_l, w_r 选取特定的前轮转向角 δ 令

$$\rho_f \sin \delta - d = 0 \quad (2.2.8)$$

则可将运动方程 (2.2.5) 转化为

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \cos \varphi \\ v \sin \varphi \\ w \end{bmatrix} \quad (2.2.9)$$

其中 $\beta = 0$, $v = \frac{r}{2}(\omega_r + \omega_l) \cos \delta$, $w = \frac{r}{2b}(\omega_r - \omega_l)$ 。 w 可以看作是机器人的横摆角速度。另外, 式 (2.2.8) 同时表示质心侧偏角始终为零, 这对轮式移动机器人的车身稳定性而言也是有利的, 且 $\omega_r - \omega_l = 0$ 也不会产生奇异点。

如果采样时间为 T_s , 则轮式移动机器人运动学模型 (2.2.9) 经离散化后的形式为

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \\ \varphi_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_k + v_k T_s \cos \varphi_k \\ y_k + v_k T_s \sin \varphi_k \\ \varphi_k + w_k T_s \end{bmatrix} \quad (2.2.10)$$

由于非完整约束的存在, 轮式移动机器人是一类典型的非完整约束系统。关于非完整约束的详细介绍, 可参照文献 [23, 62]。另外, 在实际控制中, 为了确保轮式移动机器人在运动过程中保持车身稳定, 通常会限制其运行速度的大小, 即存在控制输入约束 [63]。综上, 轮式移动机器人本质上属于非线性、多输入多输出, 同时具有状态和输入约束的系统。

因为路径跟踪问题描述是基于偏差状态提出的, 需要得到偏差状态的动力学方程。以路径上期望位置为原点建立路径坐标系, 并在路径坐标系中计算跟踪误差。假设有一个虚拟的移动机器人沿参考路径行走, 它的位置和方向代表着实际机器人的理想运动状态。定义 $(x_R, y_R, \varphi_R)^T$ 为参考运动状态, 相应地

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_R \\ \dot{y}_R \\ \dot{\varphi}_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_R \cos \varphi_R \\ v_R \sin \varphi_R \\ w_R \end{bmatrix} \quad (2.2.11)$$

定义 $(x_e, y_e, \varphi_e)^T$ 为偏差状态, 代表着机器人实际位置与参考路径之间的偏差。在虚拟参考机器人的车身坐标系下, 偏差状态为

$$\begin{bmatrix} x_e \\ y_e \\ \varphi_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_R - x \\ y_R - y \\ \varphi_R - \varphi \end{bmatrix} \quad (2.2.12)$$

对式 (2.2.12) 两边取导数, 得到偏差动力学方程如下:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_e \\ \dot{y}_e \\ \dot{\varphi}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w y_e - v + v_R \cos \varphi_e \\ -w x_e + v_R \sin \varphi_e \\ w_R - w \end{bmatrix} \quad (2.2.13)$$

参照式 (2.2.13), 当 v 和 w 分别接近 v_R 和 w_R 时, 偏差状态可接近于零。

至此，轮式移动机器人的路径跟踪问题可以描述为：给定一条期望的几何路径，设计控制器，寻找容许控制 $u = (v, w)^T$ ，使机器人的偏差状态可以收敛于零，实现轮式移动机器人的路径跟踪控制。

在轮式移动机器人的路径跟踪控制中，若实际控制信号最终需要的形式为 $u' = (w_l, w_r, \delta)^T$ ，如式 (2.2.5)，根据式 (2.2.8) 可以得到 u 和 u' 之间的关系为：

$$\begin{cases} r(\omega_r + \omega_l) \cos \delta = 2 \cdot v \\ r(\omega_r - \omega_l) = 2b \cdot w \\ \frac{(\omega_r - \omega_l) d}{(\omega_r + \omega_l) b} = \sin \delta \end{cases} \quad (2.2.14)$$

式 (2.2.14) 中的 r, b, d 为轮式移动机器人的给定参数，见表 2.1。根据式 (2.2.14)，可以将控制器的输出转换为轮式移动机器人的左右轮轮速和转向角，实现跟踪控制。

本文基于轮式移动机器人的运动学模型对路径跟踪问题进行研究时，控制系统的所有状态变量都是可测量的，并且没有外部扰动和模型失配的影响。

结合 2.1 节中路径跟踪问题的描述，定义偏差系统的控制输入 $\tilde{u} := [\tilde{u}_1, \tilde{u}_2]^T$ 如下：

$$\begin{bmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_R \cos \varphi_e - v \\ w_R - w \end{bmatrix} \quad (2.2.15)$$

则偏差动力学方程 (2.2.13) 可等价转化为：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_e \\ \dot{y}_e \\ \dot{\varphi}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w y_e + \tilde{u}_1 \\ -w x_e + v_R \sin \varphi_e \\ \tilde{u}_2 \end{bmatrix} \quad (2.2.16)$$

2.3 本章小结

本章首先对离散时间非线性系统的路径跟踪控制进行了问题描述，然后详细推导并建立了轮式移动机器人的运动学模型，以及跟踪偏差系统的动力学模型，确立了路径跟踪的控制任务。轮式移动机器人的运动学模型具有非线性和多输入多输出的特点，并且其路径跟踪控制任务要求同时满足路径收敛性和约束条件。

第3章 基于 NMPC 的移动机器人路径跟踪控制

针对具有非线性动态和约束条件的控制任务，本章将 NMPC 应用于轮式移动机器人的路径跟踪控制中，并基于最优性能函数递减的方法对优化问题的可行性和控制器的收敛性进行了理论分析。然后，基于非线性系统多面体描述和线性矩阵不等式，给出了保证算法可行性和收敛性的终端要素求解方法。另外，在 NMPC 的稳定性理论中，除附加终端惩罚和终端不等式约束的方法外，还存在附加终端等式约束、附加终端不等式约束和无终端约束的策略来保证 NMPC 控制器的稳定性。因此，本章又从非零终端和零终端约束两个方面对 NMPC 的收敛性及计算负担进行了研究和对比分析。

3.1 基于终端不等式约束的 NMPC 方案

实际的工程系统一般都具有非线性的特点，非线性模型预测控制可以直接使用被控对象的非线性模型，对其动态行为作更加准确的预测。因此，有必要对非线性系统的模型预测控制进行研究。线性系统的模型预测控制的理论研究和应用研究已经相当成熟，将模型预测控制从线性系统推广到非线性系统，主要的研究热点是稳定性理论和计算负担问题。因此，本文主要对这两方面工作进行了研究。

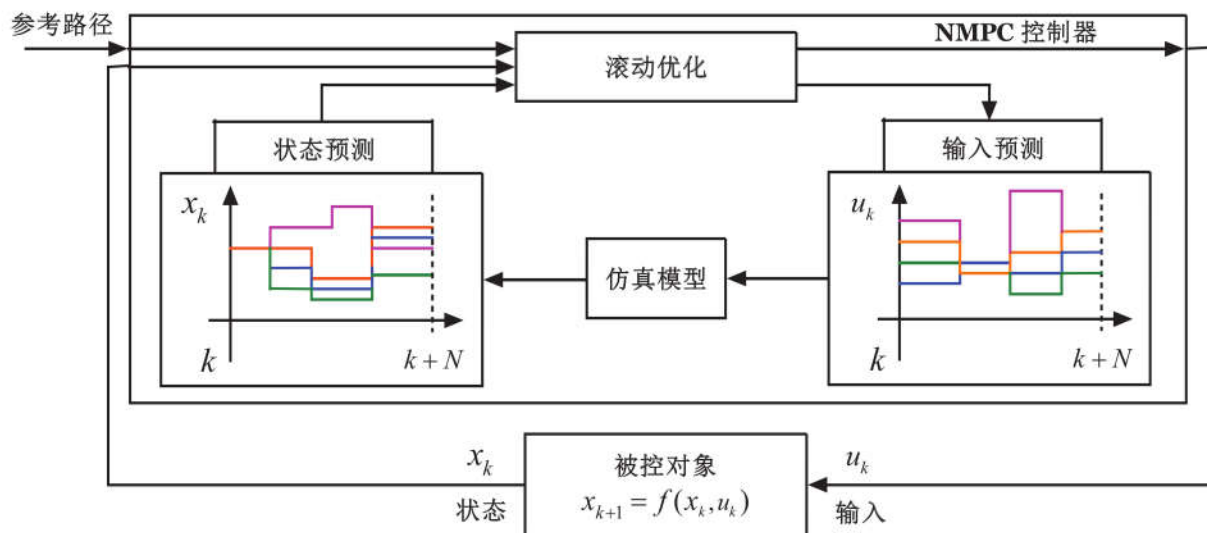


图 3.1 NMPC 控制结构

根据路径跟踪问题的描述和非线性预测控制的介绍，本文将讨论路径跟踪问题的非线性模型预测控制方案。本章所设计的路径跟踪预测控制器建立在以下三项基本原理基础上，即模型预测、滚动优化和反馈校正，其控制框图如图 3.1 所示。

3.1.1 约束优化问题描述

为了解决所提出的路径跟踪问题，同时还要满足系统的约束条件，按照非线性预测控制的标准结构，路径跟踪控制问题可以描述为一个在线求解的约束优化问题。假设系统所有状态变量都是可测量的，并且没有外部扰动和模型失配的影响，在 k 时刻，此约束优化问题的形式如下：

优化问题 1: (基于终端不等式约束的 NMPC 方案)

$$\underset{u_{k+i|k}, v_{k+i|k}, \theta_{k+i|k}}{\text{minimize}} \quad J(x_{k|k}, u_{k+i|k}, v_{k+i|k}, \theta_{k+i|k}) \quad (3.1.1)$$

满足约束条件：

$$x_{k+i+1|k} = f(x_{k+i|k}, u_{k+i|k}), \quad x_{k|k} = x_k, \quad (3.1.2a)$$

$$x_{k+i|k} \in X, \quad u_{k+i|k} \in U, \quad (3.1.2b)$$

$$\tilde{x}_{k+i|k} = x_{k+i|k} - p(\theta_{k+i|k}), \quad (3.1.2c)$$

$$\tilde{x}_{k+N|k} \in \Omega, \quad (3.1.2d)$$

$$\theta_{k+i+1|k} = g(\theta_{k+i|k}, v_{k+i|k}), \quad \theta_{k|k} = \theta_k, \quad (3.1.2e)$$

$$\theta_{k+i|k} \in \Theta, \quad v_{k+i|k} \in V, \quad (3.1.2f)$$

其中：

$$J(\tilde{x}_{k+i|k}, \tilde{u}_{k+i|k}) = \sum_{i=0}^{N-1} \left(\|\tilde{x}_{k+i|k}\|_Q^2 + \|\tilde{u}_{k+i|k}\|_R^2 \right) + E(\tilde{x}_{k+N|k}). \quad (3.1.3)$$

本文中，向量 $x \in R^n$ 的范数 $\|x\|_Q$ 定义为 $\|x\|_Q := \sqrt{x^T Q x}$ ，其中矩阵 $Q \in R^{n \times n}$ 是正定的，表示为 $Q > 0$ 。 $x_{k|k}$ ， $k \in I_0$ 代表系统状态 x 在 k 时刻的测量值，作为系统预测未来动态行为的起点。 $x_{k+i|k}$ ， $i \in I_+$ 代表在 k 时刻预测系统状态在未来 $k+i$ 时刻的预测值， I_+ 是正整数集。 $u_{k+i|k}, v_{k+i|k}, \theta_{k+i|k}$ 的含义与 $x_{k+i|k}$ 相同。 N 代表系统的预测时域。

$J(\cdot, \cdot)$ 是优化问题的目标函数，由三项构成：路径偏差惩罚项 $\|\tilde{x}_{k+i|k}\|_Q^2$ ，是保证系统状态快速地跟踪上期望路径的数学描述， Q 是状态加权矩阵。本文中的期望路径是定义在系统状态空间上的，系统的预测状态与期望路径的差值最小作为目标函数优化的目标之一，其物理意义表示系统动态跟踪上给定的期望路径，代表控制器的跟踪

性能。控制输入惩罚项 $\|\tilde{u}_{k+i|k}\|_R^2$ ，使期望的控制性能具体化， R 是控制输入加权矩阵，优化控制输入序列最小化代表控制动作的平稳性。终端惩罚项 $E(\tilde{x}_{k+N|k})$ ，它和终端域 Ω 是准无限时域 NMPC 保证优化问题的滚动可行性和系统动态对给定路径的渐近收敛性的终端要素，将在 3.1.2 小节详细介绍。优化问题 1 中的式 (3.1.2d) 是终端约束，终端域 Ω 表示在每一个预测时域的末端，系统预测状态 $x_{k+i|k}$ 应被限制在终端域内。控制输入 $u_{k+i|k}$ ，道路参数 $\theta_{k+i|k}$ ，虚拟输入 $v_{k+i|k}$ 共同作为目标函数 $J(\cdot, \cdot)$ 的决策变量。优化问题的约束条件式 (3.1.2a) 和式 (3.1.2c) 分别代表系统动力学方程和跟踪偏差状态动力学方程，式 (3.1.2b) 代表系统相应的状态和输入约束。

除去标准约束 (3.1.2a) ~ (3.1.2d)，优化问题在求解过程中还要进一步地满足额外约束 (3.1.2e) 和 (3.1.2f)，这两个约束条件描述了期望路径的演变过程。期望路径 \mathbb{P} 是以其道路参数 θ_k 进行参数化的一条几何曲线， θ_k 不是先验已知的而是要受虚拟输入 v_k 的影响，控制器在线确定道路参数序列 θ_k 以保证目标函数 $J(\cdot, \cdot)$ 尽可能地小，即在每一个采样时刻参考运动是完全更新的。虚拟输入 v_k 控制道路参数 θ_k 的演变过程，是非线性预测控制器中另外的决策变量。

该 NMPC 控制方案的机理为：在每一个采样时刻，根据当前系统状态，在线求解优化问题 1 获得预测轨迹和容许控制输入序列，并将优化控制序列的第一个元素作为控制量作用到被控系统上。在下一采样时刻根据新的测量信息重复以上过程。基于终端不等式约束的 NMPC 控制器的执行流程如表 3.1， T_{final} 为系统仿真时间。

表 3.1 NMPC 控制算法流程

优化算法 1	基于终端不等式约束的 NMPC 方案
1:	离线获得满足定理 1 条件的 $E(\cdot)$ 和 Ω
2:	初始化 $k = 0$ ，测量系统状态 x_k
3:	while $k < T_{final}$
4:	求解优化问题 1，获得可行解（次优解） $u_{k+i k}, v_{k+i k}, \theta_{k+i k}$
5:	$u_k = u_{k k}$ 作用于系统，更新系统动态
6:	更新道路参数 θ_{k+1} ，测量系统状态 x_{k+1}
7:	$k \leftarrow k + 1$
8:	end while

θ_k 在初始时刻的取值对于求解式 (3.1.2e) 是必要的。如果待跟踪的路径的初始条件

没有给定，在文献 [51] 中提出了一种解决方案来确定道路参数的初始条件：在期望路径上选择距离初始状态 x_0 最近的路径参考点作为 θ_k 的初值 θ_0 ，该思想可以归纳为如下形式的数学描述：

$$\underset{\theta_0}{\text{minimize}} \quad \|x_0 - p(\theta_0)\|. \quad (3.1.4)$$

而本文采取的处理方式是：优化问题在初始时刻求解的同时就会决策 θ_k 的初值，即道路参数的初始条件 θ_0 是在线确定的，同时为优化问题 1 的决策变量，以保证目标函数 $J(\cdot, \cdot)$ 尽可能地小。此后，当前时刻通过优化问题 1 决策得到的 θ_k 将作为下一时刻式 (3.1.2e) 的初始条件。

3.1.2 算法的可行性和收敛性分析

在对 NMPC 算法的可行性和收敛性进行分析前，先给出优化问题可行性的定义。

定义 1 (优化问题的可行性)

假设存在控制序列 $U_k := [u_{k|k}, u_{k+1|k}, \dots, u_{k+N-1|k}]$ 使：

- (1) 对于所有的 $i \in [0, N-1]$ ，约束条件 (3.1.2b) 满足；
- (2) 终端约束条件 (3.1.2d) 满足；
- (3) 目标函数 (3.1.3) 是有界的，即

$$\sum_{i=0}^{N-1} \left(\|\tilde{x}_{k+i|k}\|_Q^2 + \|\tilde{u}_{k+i|k}\|_R^2 \right) + E(\tilde{x}_{k+N|k}) < \infty$$

则称优化问题 1 是可行的，控制序列 U_k 是优化问题 1 的一个可行解。

本文用基于最优性能函数递减的分析方法对 NMPC 算法的可行性和收敛性进行分析，这种方法是目前研究 NMPC 稳定性的最常用方法。在这种方法中，采用合适的终端惩罚函数 $E(\tilde{x})$ ，终端约束集 Ω 和终端控制律 $u_F(\tilde{x})$ 是保证优化问题的可行性和对给定路径的收敛性的有效手段。在保证 NMPC 闭环稳定性的“三要素”理论框架中，以上终端要素的性质总结如下 [64]：

- (1) 终端惩罚 $E(\tilde{x})$ 是关于 \tilde{x} 连续可微的， $E(0) = 0$ 且当 $\tilde{x} \neq 0$ 时， $E(\tilde{x}) > 0$ 。
- (2) 终端约束集 (又称终端域) Ω 是连通闭集并且包含原点，且 $\Omega \subseteq X$ 。
- (3) 终端控制律 $u_F(\tilde{x})$ 仅用来计算终端惩罚和终端域，没有直接施加于系统。

(4) 当系统状态在终端域内，局部 (终端) 控制器 $u_F(\tilde{x})$ 使控制系统满足状态和输入约束条件，并且是正不变的 (即在局部控制器 $u_F(\tilde{x})$ 作用下，系统始于终端域 Ω 的状态轨迹将保持在 Ω 中)。

在标准的非线性模型预测控制的结构中，终端惩罚 $E(\tilde{x})$ 的具体形式定义如下：

$$E(\tilde{x}) = \tilde{x}^T P \tilde{x}, \quad (3.1.5)$$

其中 P 是终端惩罚矩阵， P 是在给定线性状态反馈增益下，系统的李亚普诺夫方程的唯一正定解 [64]。相应的终端域 Ω 由正标量 α 按如下定义：

$$\Omega := \{\tilde{x} \in R^n \mid \tilde{x}^T P \tilde{x} \leq \alpha\}. \quad (3.1.6)$$

为保证优化问题的可行性和对给定路径的收敛性，以上的终端三要素应当满足下述定理的条件 (2) 和 (3)。

定理 1 (NMPC 方案的可行性和收敛性)

考虑给定系统 (2.1.1) 及其路径跟踪问题，假定：

- (1) 假设 1 ~ 假设 4 全部成立；
- (2) 对于所有 $\tilde{x} \in \Omega$ ，存在局部终端控制律 $u_F(\tilde{x}) \in \tilde{U}$ 。并且当 $\tilde{x} = 0$ ， $u_F = 0$ ；
- (3) 当 $k > 0$ ，对所有的 $\tilde{x} \in \Omega$ ，终端惩罚函数 $E(\tilde{x})$ 满足：

$$E(\tilde{x}_{k+1+N|k+1}) - E(\tilde{x}_{k+N|k}) + \|\tilde{x}_{k+N|k+1}\|_Q^2 + \|\tilde{u}_{k+N|k+1}\|_R^2 \leq 0, \quad (3.1.7)$$

- (4) 优化问题 1 在初始时刻 $k = 0$ 有可行解。

则：

- (1) 优化问题 1 对任意 $k \geq 0$ 都是可行的；
- (2) 当 $k \rightarrow \infty$ ，路径跟踪偏差 \tilde{x} 能收敛于零，即当 $k \rightarrow \infty$ ，系统能够跟踪上参考路径。

证明 先简要叙述证明思路：将优化问题决策出来的最优输入同终端反馈控制律相结合可以很容易的证明出滚动可行性；根据正不变性条件 (3.1.7)，选择优化问题的最优值函数作为李亚普诺夫函数，证明出最优值函数是单调递减的，即表明实际系统是渐近收敛于期望路径的。

假设在 k 时刻，优化问题 1 存在一个可行 (次优) 解 $\tilde{U}_k^* \in \tilde{U}$

$$\tilde{U}_k^* = [\tilde{u}_{k|k}^*, \tilde{u}_{k+1|k}^*, \dots, \tilde{u}_{k+N-1|k}^*]. \quad (3.1.8)$$

在 \tilde{U}_k^* 作用下，系统 (2.1.1) 在预测时域内的状态轨迹应满足状态约束且轨迹的末端进入终端域。与可行解 \tilde{U}_k^* 相对应的路径偏差优化轨迹定义为 \tilde{X}_k^*

$$\tilde{X}_k^* = [\tilde{x}_{k|k}^*, \tilde{x}_{k+1|k}^*, \dots, \tilde{x}_{k+N|k}^*], \quad (3.1.9)$$

将系统的最优性能指标函数定义为李亚普诺夫函数 V_k 。在可行解 \tilde{U}_k^* 下的目标函数数值 J_k 为：

$$V_k(\tilde{x}, \tilde{u}) = J_k = \sum_{i=0}^{N-1} \left(\|\tilde{x}_{k+i|k}^*\|_Q^2 + \|\tilde{u}_{k+i|k}^*\|_R^2 \right) + E(\tilde{x}_{k+N|k}^*). \quad (3.1.10)$$

将 \tilde{U}_k^* 的第一个控制分量施加于系统，即 $\tilde{u}_k = \tilde{u}_{k|k}^*$ 。由于没有模型失配和外部干扰的影响，在 $k+1$ 时刻，偏差系统状态与 $\tilde{x}_{k+1|k}^*$ 一致。

优化问题 1 在 $k+1$ 时刻的可行解可以选择如下：

$$\begin{aligned}\tilde{U}_{k+1} &= [\tilde{u}_{k+1|k+1}, \dots, \tilde{u}_{k+N-1|k+1}, \tilde{u}_{k+N|k+1}] \\ &= [\tilde{u}_{k+1|k}^*, \dots, \tilde{u}_{k+N-1|k}^*, u_F(\tilde{x}_{k+N|k}^*)],\end{aligned}\quad (3.1.11)$$

\tilde{U}_{k+1} 包含两部分：第一部分是 k 时刻得到的优化控制输入 \tilde{U}_k^* 去掉第一个分量后的剩余部分；第二部分是由终端控制器产生的控制输入 $u_F(\tilde{x}_{k+N|k}^*)$ ，衔接在第一部分的末端。由于 k 时刻的控制输入是满足控制约束的，因此预选控制 (3.1.11) 的第一部分也满足控制约束，且此部分控制输入对应的状态轨迹满足状态约束条件；对由线性状态反馈控制的非线性系统而言，终端域是一个不变集，由于 k 时刻的偏差状态 \tilde{X}_k^* 的末端已经满足终端约束条件，即 $\tilde{x}_{k+N|K}^* \in \Omega$ ，则终端控制律 (预选控制的第二部分) 也满足输入约束，即 $u_F(\tilde{x}_{k+N|k}^*) \in \tilde{U}$ 。综上，优化问题 1 在 $k+1$ 时刻的可行解 \tilde{U}_{k+1} 满足输入约束条件，即表明如果系统在 k 时刻有最优解或可行解，那么优化问题 1 在 $k+1$ 时刻也是可行的。显然，以任何一个可行解作为讨论的开始，以上推论都是成立的。

在控制输入 \tilde{U}_{k+1} 的作用下，偏差系统的状态序列 \tilde{X}_{k+1} 为

$$\begin{aligned}\tilde{X}_{k+1} &= [\tilde{x}_{k+1|k+1}, \dots, \tilde{x}_{k+N|k+1}, \tilde{x}_{k+N+1|k+1}] \\ &= [\tilde{x}_{k+1|k}^*, \dots, \tilde{x}_{k+N|k}^*, \tilde{x}_{k+N+1|k+1}],\end{aligned}\quad (3.1.12)$$

\tilde{X}_{k+1} 满足状态约束和终端约束。根据式 (3.1.11) 和式 (3.1.12)，系统在 $k+1$ 时刻的目标函数值 J_{k+1} 为：

$$\begin{aligned}J_{k+1} &= \sum_{i=0}^{N-1} \left(\|\tilde{x}_{k+1+i|k+1}\|_Q^2 + \|\tilde{u}_{k+1+i|k+1}\|_R^2 \right) + E(\tilde{x}_{k+1+N|k+1}) \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} \left(\|\tilde{x}_{k+1+i|k}^*\|_Q^2 + \|\tilde{u}_{k+1+i|k}^*\|_R^2 \right) + \|\tilde{x}_{k+N|k+1}\|_Q^2 \\ &\quad + \|\tilde{u}_{k+N|k+1}\|_R^2 + E(\tilde{x}_{k+1+N|k+1}) \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} \left(\|\tilde{x}_{k+i|k}^*\|_Q^2 + \|\tilde{u}_{k+i|k}^*\|_R^2 \right) - \|\tilde{x}_{k|k}^*\|_Q^2 - \|\tilde{u}_{k|k}^*\|_R^2 \\ &\quad + \|\tilde{x}_{k+N|k+1}\|_Q^2 + \|\tilde{u}_{k+N|k+1}\|_R^2 + E(\tilde{x}_{k+1+N|k+1}),\end{aligned}\quad (3.1.13)$$

由于 $k+1$ 时刻的最优解要优于可行解 \tilde{U}_{k+1} ，即 $V_{k+1} \leq J_{k+1}$ ，因此

$$\begin{aligned}V_{k+1} - V_k &\leq J_{k+1} - V_k \\ &= -\|\tilde{x}_{k|k}^*\|_Q^2 - \|\tilde{u}_{k|k}^*\|_R^2 + \|\tilde{x}_{k+N|k+1}\|_Q^2 + \|\tilde{u}_{k+N|k+1}\|_R^2 \\ &\quad + E(\tilde{x}_{k+1+N|k+1}) - E(\tilde{x}_{k+N|k}^*).\end{aligned}\quad (3.1.14)$$

根据式 (3.1.7) 易知：

$$V_{k+1} - V_k \leq -\|\tilde{x}_{k|k}^*\|_Q^2 - \|\tilde{u}_{k|k}^*\|_R^2.\quad (3.1.15)$$

至此, 最优值函数 V_k 是单调递减的并且零是其下界。因此, 实际系统的路径跟踪偏差会随着时间的增加, 渐近收敛于零。相应地, 系统 (2.1.1) 的状态最终会跟随上期望路径, 即 $\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{x}_k = 0$ 。□

综上, 只要找到满足定理 1 条件的终端惩罚函数 $E(\tilde{x})$, 终端约束集 Ω 和相应的终端控制律 $u_F(\tilde{x})$, 基于终端不等式约束的 NMPC 控制方案的可行性和收敛性即可得到保证。寻找合适的终端三要素是 NMPC 控制器设计中很重要的组成部分, 下节将对此问题进行详细说明。

3.2 基于 LMI 的 NMPC 终端要素设计方法

线性化是处理具有非线性动态系统的重要手段。基于泰勒级数展开进行局部线性化的预测模型, 在线性化过程中忽略了高阶非线性项, 与实际偏离较大, 这会直接影响预测控制的控制性能。另一方面, 为了降低控制器的设计难度通常需要相对简化的模型, 真实的系统模型与简化模型之间的差距统称为模型的不确定性。为了处理具有非线性或模型不确定性的系统问题, 在控制理论中有两种模型来描述实际的非线性系统, 即多面体模型和线性分式模型。

从上节可知, 所提出的 NMPC 控制方案的收敛性和可行性需要通过终端惩罚函数、终端约束集和终端控制律来保证。为了获得满足定理 1 条件的终端惩罚函数, 终端约束集和终端控制律, 本节将建立非线性系统 (2.2.16) 的多面体模型, 并在此基础上讨论 NMPC 终端三要素的确定方法和终端域的优化方法。

3.2.1 基于非线性多面体描述的终端约束集

2.2 节已经得到了在偏差控制输入 $\tilde{u} = [\tilde{u}_1, \tilde{u}_2]^T$ 作用下, 轮式移动机器人偏差系统的动力学方程为

$$\dot{\tilde{x}} := F(\tilde{x}, \tilde{u}) = \begin{bmatrix} \tilde{x}_2 c(\theta) v + \tilde{u}_1 \\ -\tilde{x}_1 c(\theta) v + v_R \sin \tilde{x}_3 \\ \tilde{u}_2 \end{bmatrix} \quad (3.2.1)$$

其中 $\tilde{x} = [\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3]^T = [x_e, y_e, \varphi_e]^T$, $c(\theta)$ 表示由道路参数 θ 确定的路径参考点处的道路曲率。推得式 (3.2.1) 时借助了线速度与角速度的关系 $w = \frac{v}{R} = v \cdot c$ 。

$\tilde{x} = 0$ 是偏差系统 (3.2.1) 的平衡点, 将非线性系统 (3.2.1) 沿期望路径进行线性化,

其 Jacobian 矩阵 $\left[\frac{\partial F}{\partial \tilde{x}} \quad \frac{\partial F}{\partial \tilde{u}} \right]$ 为

$$\left[\begin{array}{ccccc} \frac{\partial F}{\partial \tilde{x}_1} & \frac{\partial F}{\partial \tilde{x}_2} & \frac{\partial F}{\partial \tilde{x}_3} & \frac{\partial F}{\partial \tilde{u}_1} & \frac{\partial F}{\partial \tilde{u}_2} \end{array} \right] = \begin{bmatrix} 0 & c(\theta)v & 0 & 1 & 0 \\ -c(\theta)v & 0 & v_R \sin \tilde{x}_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.2.2)$$

系统不确定性的描述集合，一般是根据非线性系统的 Jacobian 矩阵中偏导数的最大最小值来确定的。因此对非线性系统进行多面体模型建模时，常基于不确定性参数的取值范围确定多面体的顶点。从式 (3.2.2) 可以看出，多面体模型的顶点 $[A_i \ B_i]$, $i = 1, 2, \dots, q$ ，可以通过 v 和 $c(\theta)$ 的边界值获得， v 和 $c(\theta)$ 都是有界变量，它们的取值范围由期望的几何路径决定。因此，偏差系统 (3.2.1) 的多面体描述集合 Σ 定义如下

$$\Sigma := Co\{[A_1 \ B_1], [A_2 \ B_2], \dots, [A_q \ B_q]\} \quad (3.2.3)$$

其中 $A_i \in R^{3 \times 3}$, $B_i \in R^{3 \times 2}$, q 为顶点矩阵的个数。符号 Co 称为凸包，其几何意义为所有包含顶点 $[A_i \ B_i]$ 的凸集的交集。因此，轮式移动机器人偏差系统的离散多面体模型为

$$\tilde{x}_{k+1} \subseteq \Sigma_0 \left[\begin{array}{c} \tilde{x}_k \\ \tilde{u}_k \end{array} \right] \quad \Sigma_0 := [A \ B] \in \Sigma \quad (3.2.4)$$

在非线性系统多面体描述理论中，式 (3.2.4) 表示，非线性系统 (3.2.1) 的系统矩阵 $[A \ B]$ 在集合 Σ 给定的矩阵多面体模型中取值，即满足

$$[A \ B] = \sum_{i=1}^q \lambda_i [A_i \ B_i], \quad \lambda_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^q \lambda_i = 1 \quad (3.2.5)$$

MATLAB 中的 LMI 工具箱使用 `psys` 函数描述多面体模型。多面体模型可以用来描述具有非线性或不确定性的实际系统，一个系统的多面体模型表示，在其中的每一个模型代表着实际系统在某一特定运行条件下的状况^[65]，即非线性系统 (3.2.1) 的所有可能模型均包含于凸多面体 Σ 中。对于本文中具有非线性参数时变特点的路径跟踪问题而言，采用多面体模型 (3.2.4) 描述仿射依赖时变参数的状态空间模型 (3.2.1)，可以将寻找合适终端要素的问题转化为一组线性矩阵不等式的解。基于非线性多面体描述 (3.2.4) 和线性矩阵不等式 (Linear Matrix Inequality, LMI)，定理 2 给出了保证式 (3.1.7) 成立的充要条件。

定理 2 给定状态加权矩阵 $Q \in R^{3 \times 3}$ ，输入加权矩阵 $R \in R^{2 \times 2}$ 和非线性系统 (3.2.1) 的多面体模型描述 (3.2.4)。假设对所有的 $i = [1, \dots, q]$ ，存在正定对称矩阵 $X \in R^{3 \times 3}$ 和矩阵 $Y \in R^{2 \times 3}$ 满足

$$\begin{bmatrix} X & * & * & * \\ A_i X + B_i Y & X & * & * \\ Q^{\frac{1}{2}} X & 0 & I & * \\ R^{\frac{1}{2}} Y & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \geq 0. \quad (3.2.6)$$

记 $E(\tilde{x}) := \tilde{x}^T P \tilde{x}$, $P = X^{-1}$, $u_F(\tilde{x}) := Y X^{-1} \tilde{x}$, 则在终端控制律 $u_F(\tilde{x})$ 的作用下, 对于任意的 $\tilde{x} \in \Omega = \{\tilde{x} \in R^n \mid \tilde{x}^T P \tilde{x} \leq \alpha, \alpha > 0\}$, $E(\tilde{x})$ 满足定理 1 中的式 (3.1.7), 式 (3.2.6) 中的 * 表示沿对角线对称位置的块矩阵的转置。

证明 定义 $K := Y X^{-1}$, 将式 (3.2.6) 左乘和右乘对角矩阵 $\{X^{-1}, I, I, I\}$ 构造合同变换, I 为适当维数的单位矩阵, 并应用 $P = X^{-1}$, $Y = K X$, 得

$$\begin{bmatrix} P & * & * & * \\ A_i + B_i K & P^{-1} & * & * \\ Q^{\frac{1}{2}} & 0 & I & * \\ R^{\frac{1}{2}} K & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \geq 0. \quad (3.2.7)$$

将式 (3.2.7) 转化为等价的分块矩阵

$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (3.2.8)$$

其中

$$L_{11} = \begin{bmatrix} P & * & * \\ A_i + B_i K & P^{-1} & * \\ Q^{\frac{1}{2}} & 0 & I \end{bmatrix}, \quad L_{12} = L_{21}^T = \begin{bmatrix} (R^{\frac{1}{2}} K)^T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad L_{22} = I$$

应用 Schur 补公式, 式 (3.2.7) 等价于如下的矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} P - K^T R K - Q & * & * \\ A_i + B_i K & P^{-1} & * \\ Q^{\frac{1}{2}} & 0 & I \end{bmatrix} \geq 0. \quad (3.2.9)$$

对任意的 $\lambda_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^q \lambda_i = 1$, $i = 1, 2, \dots, q$

$$\lambda_i \begin{bmatrix} P - K^T R K - Q & * & * \\ A_i + B_i K & P^{-1} & * \\ Q^{\frac{1}{2}} & 0 & I \end{bmatrix} \geq 0. \quad (3.2.10)$$

对 (3.2.10) 求和, 得

$$\begin{bmatrix} P - K^T R K - Q & * & * \\ \sum_{i=1}^q \lambda_i (A_i + B_i K) & P^{-1} & * \\ Q^{\frac{1}{2}} & 0 & I \end{bmatrix} \geq 0. \quad (3.2.11)$$

采用如前所述的方法，再次利用 Schur 补公式，式 (3.2.7) 最终等价于

$$\left(\sum_{i=1}^q \lambda_i A_{i,cl} \right)^T P \left(\sum_{i=1}^q \lambda_i A_{i,cl} \right) - P + Q + K^T R K \leq 0. \quad (3.2.12)$$

其中 $A_{i,cl} := A_i + B_i K$ 。

选择 $E(\tilde{x}) = \tilde{x}^T P \tilde{x}$ 和 $u_F(\tilde{x}) = K \tilde{x}$ ，沿 $\tilde{x}_{k+1} = F(\tilde{x}_k, K \tilde{x}_k)$ 的状态轨迹计算 $E(\tilde{x})$ 的差分

$$\begin{aligned} E(\tilde{x}_{k+1}) - E(\tilde{x}_k) &= \tilde{x}_{k+1}^T P \tilde{x}_{k+1} - \tilde{x}_k^T P \tilde{x}_k \\ &= [F(\tilde{x}_k, K \tilde{x}_k)]^T P F(\tilde{x}_k, K \tilde{x}_k) - \tilde{x}_k^T P \tilde{x}_k \\ &= \tilde{x}_k^T \left[\left(\sum_{i=1}^q \lambda_i A_{i,cl} \right)^T P \left(\sum_{i=1}^q \lambda_i A_{i,cl} \right) - P \right] \tilde{x}_k \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

由式 (3.2.12)，得

$$E(\tilde{x}_{k+1}) - E(\tilde{x}_k) \leq -\tilde{x}_k^T Q \tilde{x}_k - \tilde{x}_k^T K^T R K \tilde{x}_k \quad (3.2.14)$$

因此式 (3.1.7) 成立，由式 (3.2.6) 确定的 $E(\tilde{x})$ 和 $u_F(\tilde{x})$ 可以作为基于终端不等式约束的 NMPC 控制方案的终端惩罚函数和终端控制律， $\Omega = \{\tilde{x} \in R^n \mid \tilde{x}^T P \tilde{x} \leq \alpha, \alpha > 0\}$ 则为 NMPC 控制方案的终端约束集。□

定理 2 将系统控制性能的具体需求用一组线性矩阵不等式条件加以描述，只要凸多面体 Σ 的各顶点 $[A_i \ B_i]$, $i = 1, 2, \dots, q$ 满足 LMI 约束条件 (3.2.6)，那么凸多面体 Σ 内的所有系统均满足该约束条件。

机械系统所具有的物理约束条件，一般表示为时域硬约束形式，本文考虑的输入约束和状态约束定义如下：

$$-\hat{x}_i \leq \tilde{x}_{i,k} \leq \hat{x}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.2.15a)$$

$$-\hat{u}_j \leq \tilde{u}_{j,k} \leq \hat{u}_j, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (3.2.15b)$$

$\tilde{x}_{i,k}$ 表示状态向量 \tilde{x}_k 的第 i 个状态分量， $\tilde{u}_{j,k}$ 表示输入向量 \tilde{u}_k 的第 j 个输入分量。 \hat{x}_i 和 \hat{u}_j 是已知的正常量。定理 2 给出了当 $\tilde{x} \in \Omega$ ， $E(\tilde{x})$ 满足不等式 (3.1.7) 的条件。定理 3 和定理 4 分别给出了在终端域 Ω 内系统满足输入约束和状态约束的条件。

定理 3 终端域 Ω 内任意的元素 \tilde{x} 满足状态约束条件 (3.2.15a)，等价于矩阵 Y 和对称矩阵 X 进一步满足矩阵不等式 [66]

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha} \hat{x}_i^2 & e_i^T X \\ * & X \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.2.16)$$

其中 e_i 为输入空间 R^n 上的第 i 个标准向量基。

证明 根据约束条件 (3.2.15a)，应有 $\tilde{x}_{i,k}^2 \leq \hat{x}_i^2$ ，由于 $\tilde{x}_{i,k} = e_i^T \tilde{x}_k$ 得

$$\tilde{x}_k^T e_i e_i^T \tilde{x}_k \leq \hat{x}_i^2 \quad (3.2.17)$$

式 (3.2.17) 成立的一个充分条件是

$$\tilde{x}_k^T \frac{e_i e_i^T}{\hat{x}_i^2} \tilde{x}_k \leq \frac{\tilde{x}_k^T P \tilde{x}_k}{\alpha} \quad (3.2.18)$$

考虑到 \tilde{x}_k 的任意性, 式 (3.2.18) 成立要求:

$$\frac{P}{\alpha} - \frac{e_i e_i^T}{\hat{x}_i^2} \geq 0 \quad (3.2.19)$$

根据 Schur 补公式有:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha} \hat{x}_i^2 & e_i^T \\ * & P \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.2.20)$$

用 $\text{diag}\{I, X\}$ 对式 (3.2.20) 进行合同变换, 即可得到结论。□

定理 4 对于任意的 $\tilde{x} \in \Omega$, $u_F(\tilde{x}) = YX^{-1}\tilde{x}$ 满足输入约束条件 (3.2.15b), 等价于矩阵 Y 和对称矩阵 X 进一步满足矩阵不等式^[66]

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha} \hat{u}_j^2 & e_j^T Y \\ * & X \end{bmatrix} \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (3.2.21)$$

其中 e_j 为输入空间 R^m 上的第 j 个标准向量基。

证明 根据约束条件 (3.2.15b), 应有 $\tilde{u}_{j,k}^2 \leq \hat{u}_j^2$, 由于 $\tilde{u}_{j,k} = e_j^T K \tilde{x}_k$ 得

$$\tilde{x}_k^T K^T e_j e_j^T K \tilde{x}_k \leq \hat{u}_j^2 \quad (3.2.22)$$

式 (3.2.22) 成立的一个充分条件是

$$\tilde{x}_k^T \frac{K^T e_j e_j^T K}{\hat{u}_j^2} \tilde{x}_k \leq \frac{\tilde{x}_k^T P \tilde{x}_k}{\alpha} \quad (3.2.23)$$

考虑到 \tilde{x}_k 的任意性, 式 (3.2.23) 成立要求:

$$\frac{P}{\alpha} - \frac{K^T e_j e_j^T K}{\hat{u}_j^2} \geq 0 \quad (3.2.24)$$

根据 Schur 补公式有:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha} \hat{u}_j^2 & e_j^T K \\ * & P \end{bmatrix} \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (3.2.25)$$

用 $\text{diag}\{I, X\}$ 对式 (3.2.25) 进行合同变换, 即可得到结论。□

综合考虑定理 2~4, 可以得出以下结论: 基于非线性系统 (3.2.1) 的多面体模型描述 (3.2.4), 假设存在对称正定矩阵 $X \in R^{3 \times 3}$, 矩阵 $Y \in R^{2 \times 3}$ 以及 $\alpha > 0$, 满足线性矩阵不等式组 (3.2.6), (3.2.16) 和 (3.2.21), 则椭圆域 $\Omega = \{\tilde{x} \in R^n \mid \tilde{x}^T P \tilde{x} \leq \alpha\}$ 为 3.1 节中基于终端不等式约束的 NMPC 方案的终端约束集, 相应的终端控制律记为 $u_F(\tilde{x}) = YX^{-1}\tilde{x}$ 。可见, 基于多面体模型和 LMI 将原系统的非凸优化问题转化为凸优化问题, 使确定终端三要素的设计任务得以简化。

3.2.2 终端约束集的优化方法

在上一小节，基于非线性系统的多面体描述和线性矩阵不等式，确定了 NMPC 控制方案的终端域 $\Omega = \{\bar{x} \in R^n \mid \bar{x}^T P \bar{x} \leq \alpha\}$ ， Ω 的容量即包含点的个数，与可行解的范围有关，一般要求终端域的容量越大越好。从终端域的形式来看，它是终端惩罚函数的水平截集，其容量大小与矩阵 αX 的行列式成正比^[67]，因此在优化求解终端域时要寻找满足条件的最大正常数 α ，终端域优化方法的数学描述如下：

$$\begin{aligned} & \max_{\alpha, X, Y} \det(\alpha X)^{\frac{1}{m}} & (3.2.26) \\ \text{s.t. } & \alpha > 0, X > 0, & (3.2.6), (3.2.16), (3.2.21) \end{aligned}$$

其中 m 代表矩阵 X 的维数， $\det(\cdot)$ 代表计算相应矩阵的行列式。由于优化问题 (3.2.26) 的目标函数存在变量 α 和 X 的乘积项，并且 $\det(\cdot)$ 不是变量的凸函数，优化问题 (3.2.26) 仍是一个非凸的非线性优化问题。本文采用文献 [66] 中特征值的几何均值法将非凸优化问题 (3.2.26) 转化为凸优化问题。具体做法如下。

由于 $\alpha > 0$ ，令

$$X_0 = \alpha X, \quad Y_0 = \alpha Y,$$

将约束条件 (3.2.6)，(3.2.16)，(3.2.21) 分别改写为

$$\begin{bmatrix} X_0 & * & * & * \\ A_i X_0 + B_i Y_0 & X_0 & * & * \\ Q^{\frac{1}{2}} X_0 & 0 & \alpha I & * \\ R^{\frac{1}{2}} Y_0 & 0 & 0 & \alpha I \end{bmatrix} \geq 0 \quad i = [1, \dots, q] \quad (3.2.27)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_i^2 & e_i^T X_0 \\ * & X_0 \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.2.28)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{u}_j^2 & e_j^T Y_0 \\ * & X_0 \end{bmatrix} \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (3.2.29)$$

因此，最大化终端域 Ω 的容量问题可以描述为优化问题 2。

优化问题 2：(终端约束集的优化)

$$\begin{aligned} & \min_{\alpha, X_0, Y_0} -\det(X_0)^{\frac{1}{m}} & (3.2.30) \\ \text{s.t. } & \alpha > 0, X_0 > 0, & (3.2.27), (3.2.28), (3.2.29) \end{aligned}$$

文献 [68] 指出式 (3.2.30) 是一个凸优化问题，通过求解优化问题 2 得到变量 α ， X_0 ， Y_0 ，再利用 $X_0 = \alpha X$ ， $Y_0 = \alpha Y$ 和 $P = X^{-1}$ ， $K = YX^{-1}$ 得到终端惩罚矩阵 P 和终端控制增益 K 。

3.3 基于终端等式约束的 NMPC 方案

通过 3.2 节的分析，找到满足定理 1 条件的终端惩罚 $E(\cdot)$ 、终端域 Ω 和终端控制器 u_F ，是 NMPC 控制器设计中一个十分重要的组成部分。但是对于非线性系统或时变系统而言，求解合适的终端惩罚和终端域通常十分困难。终端惩罚和终端域通常基于局部定义，一般在优化问题 1 求解前离线计算好，如 3.2.2 小节中的优化问题 2。终端域的优化和计算成为预测控制的研究热点之一，很多文献提出了计算终端域的优化方法。然而，附加的优化方法同时也会增加 NMPC 优化控制问题本身的复杂性。

基于终端不等式约束的 NMPC 的终端域 Ω 形式：

$$\Omega := \{\tilde{x} \in R^n | E(\tilde{x}) \leq \alpha\}. \quad (3.3.1)$$

其中 $\alpha > 0$ 。此时终端域可以看作是偏差状态 $\tilde{x} = 0$ 的一个邻域。式 (3.3.1) 本质上是一个终端不等式约束，尽管计算终端域十分困难，但是在控制器设计中很容易得到期望状态的信息，可以充分利用期望路径。因此，定义终端域如式 (3.3.2)：

$$\Omega := \{0\} \quad (3.3.2)$$

式 (3.3.2) 意味着路径跟踪偏差应当在每一个预测时域的末端强制归零，即终端域此时选择为待跟踪的路径 \mathbb{P} ，将这种终端域定义为零终端。与式 (3.3.1) 相比，式 (3.3.2) 实际上是一个等式约束。与此同时，强制终端状态等于零的控制策略使终端惩罚函数和终端控制器在保证 NMPC 方案的收敛性方面变得不必要。因此，此时终端惩罚函数和终端控制律可以选择为 $E(\cdot) = 0$ 和 $u_F = 0$ 。将优化问题 1 中的式 (3.1.2d) 替换成式 (3.3.2)，得到基于零终端约束的 NMPC 方案的数学描述如下：

优化问题 3: (基于终端等式约束的 NMPC 方案)

$$\underset{u_{k+i|k}, v_{k+i|k}, \theta_{k+i|k}}{\text{minimize}} \quad J(x_{k|k}, u_{k+i|k}, v_{k+i|k}, \theta_{k+i|k}) \quad (3.3.3)$$

满足约束条件：

$$x_{k+i+1|k} = f(x_{k+i|k}, u_{k+i|k}), \quad x_{k|k} = x_k, \quad (3.3.4a)$$

$$x_{k+i|k} \in X, \quad u_{k+i|k} \in U, \quad (3.3.4b)$$

$$\tilde{x}_{k+i|k} = x_{k+i|k} - p(\theta_{k+i|k}), \quad (3.3.4c)$$

$$x_{k+N|k} \in \mathbb{P}, \quad (3.3.4d)$$

$$\theta_{k+i+1|k} = g(\theta_{k+i|k}, v_{k+i|k}), \quad \theta_{k|k} = \theta_k, \quad (3.3.4e)$$

$$\theta_{k+i|k} \in \Theta, \quad v_{k+i|k} \in V, \quad (3.3.4f)$$

其中：

$$J(\tilde{x}_{k+i|k}, \tilde{u}_{k+i|k}) = \sum_{i=0}^{N-1} \left(\|\tilde{x}_{k+i|k}\|_Q^2 + \|\tilde{u}_{k+i|k}\|_R^2 \right). \quad (3.3.5)$$

将式 (3.3.3) ~ 式 (3.3.5) 定义为优化问题 3，优化问题 3 和优化问题 1 相比，只有终端要素的形式不同，其他变量和符号的意义是一致的。下面给出基于零终端约束的 NMPC 方案对期望路径的收敛性的分析。

推论 1：（零终端预测控制的可行性和收敛性）

考虑给定系统 (2.1.1) 及其路径跟踪问题，假定：

- (1) 假设 1 ~ 假设 4 全部成立；
- (2) 终端域等于待跟踪的期望几何参考路径 \mathbb{P} ；
- (3) 优化问题 3 在初始时刻 $k = 0$ 有可行解。

则：

- (1) 优化问题 3 对所有 $k \geq 0$ 时刻都有可行解；
- (2) 当 $k \rightarrow \infty$ 时，由式 (2.1.1)，(3.3.3) ~ (3.3.5) 确定的闭环系统的状态轨迹可以收敛于期望路径 \mathbb{P} 。

证明 式 (3.1.8) 和式 (3.1.9) 中的 \tilde{U}_k^* , \tilde{X}_k^* 表示 k 时刻的优化控制序列和偏差状态。因为终端等式约束 (3.3.4d)，优化控制序列 \tilde{U}_k^* 使终端状态 ($k + N$ 时刻的偏差状态) 为零，即

$$\begin{aligned} \tilde{X}_k^* &= [\tilde{x}_{k|k}^*, \tilde{x}_{k+1|k}^*, \dots, \tilde{x}_{k+N|k}^*] \\ &= [\tilde{x}_{k|k}^*, \tilde{x}_{k+1|k}^*, \dots, \tilde{x}_{k+N-1|k}^*, 0]. \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

系统在 k 时刻的目标函数值 J_k 为

$$J_k = \sum_{i=0}^{N-1} \left(\|\tilde{x}_{k+i|k}^*\|_Q^2 + \|\tilde{u}_{k+i|k}^*\|_R^2 \right). \quad (3.3.7)$$

由于不存在模型失配和外部干扰的影响，在 $k + 1$ 时刻，一个可行的控制输入序列如下

$$\tilde{U}_{k+1} = [\tilde{u}_{k+1|k}^*, \dots, \tilde{u}_{k+N-1|k}^*, 0]. \quad (3.3.8)$$

同 \tilde{U}_{k+1} 对应的状态序列 \tilde{X}_{k+1} 应为

$$\begin{aligned} \tilde{X}_{k+1} &= [\tilde{x}_{k+1|k}^*, \tilde{x}_{k+2|k}^*, \dots, \tilde{x}_{k+N|k}^*, \tilde{x}_{k+N+1|k+1}^*] \\ &= [\tilde{x}_{k+1|k}^*, \tilde{x}_{k+2|k}^*, \dots, \tilde{x}_{k+N-1|k}^*, 0, 0] \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

根据式 (3.3.8) 和式 (3.3.9)，系统在 $k+1$ 时刻的目标函数值 J_{k+1} 为

$$\begin{aligned}
 J_{k+1} &= \sum_{i=0}^{N-1} \left(\|\tilde{x}_{k+1+i|k+1}\|_Q^2 + \|\tilde{u}_{k+1+i|k+1}\|_R^2 \right) \\
 &= \sum_{i=0}^{N-1} \left(\|\tilde{x}_{k+1+i|k}^*\|_Q^2 + \|\tilde{u}_{k+1+i|k}^*\|_R^2 \right) + \|\tilde{x}_{k+N|k+1}\|_Q^2 + \|\tilde{u}_{k+N|k+1}\|_R^2 \\
 &= \sum_{i=0}^{N-1} \left(\|\tilde{x}_{k+i|k}^*\|_Q^2 + \|\tilde{u}_{k+i|k}^*\|_R^2 \right) - \|\tilde{x}_{k|k}^*\|_Q^2 - \|\tilde{u}_{k|k}^*\|_R^2 \\
 &\quad + \|\tilde{x}_{k+N|k+1}\|_Q^2 + \|\tilde{u}_{k+N|k+1}\|_R^2,
 \end{aligned} \tag{3.3.10}$$

定义 V_k 和 V_{k+1} 分别为系统在 k 时刻和 $k+1$ 时刻的最优值函数，由于 $k+1$ 时刻的最优解要优于可行解 \tilde{U}_{k+1} ，因此

$$\begin{aligned}
 V_{k+1} - V_k &\leq J_{k+1} - V_k \\
 &= -\|\tilde{x}_{k|k}^*\|_Q^2 - \|\tilde{u}_{k|k}^*\|_R^2 + \|\tilde{x}_{k+N|k+1}\|_Q^2 + \|\tilde{u}_{k+N|k+1}\|_R^2
 \end{aligned} \tag{3.3.11}$$

因为 $\tilde{x}_{k+N|k+1} = 0$ 和 $\tilde{u}_{k+N|k+1} = 0$ ，式 (3.3.11) 为

$$V_{k+1} - V_k \leq J_{k+1} - V_k = -\|\tilde{x}_{k|k}^*\|_Q^2 - \|\tilde{u}_{k|k}^*\|_R^2, \tag{3.3.12}$$

即目标函数序列 J_k 是单调不增的并且零是其下界。所以，当 $k \rightarrow \infty$ 时，路径跟踪偏差 \tilde{x} 能够收敛于零。如果优化问题 3 在 k 时刻是可行的，根据假设 2 和假设 4，当 $\tilde{x}_k = 0$ 时，系统 (2.1.1) 可以跟踪上参考路径。□

基于终端等式约束的 NMPC 方案将期望路径作为终端域，与基于终端不等式约束的 NMPC 方案相比，不再需要额外的优化方法计算终端惩罚函数、终端域和终端控制律。本节设计的 NMPC 控制器的具体执行流程如表 3.2， T_{final} 为系统仿真时间。

表 3.2 零终端预测控制算法流程

优化算法 3	基于终端等式约束的 NMPC 方案
1:	初始化 $k = 0$ ，测量系统状态 x_k
2:	while $k < T_{final}$
3:	基于 $\Omega = \{0\}$ 求解优化问题 3，获得可行解（次优解） $u_{k+i k}, v_{k+i k}, \theta_{k+i k}$
4:	$u_k = u_{k k}$ 作用于系统，更新系统动态
5:	更新道路参数 θ_{k+1} ，测量系统状态 x_{k+1}
6:	$k \leftarrow k + 1$
7:	end while

3.4 仿真对比与分析

为了验证 3.1 节提出的基于终端不等式约束的 NMPC 方案, 和 3.3 节提出的基于终端等式约束的 NMPC 方案, 分别将这两种算法应用到轮式移动机器人的路径跟踪问题中。在相同的仿真条件下, (见表 3.3), 分别从系统动态和计算时间两个方面对这两种算法进行对比和分析。

表 3.3 仿真参数表

参 数	符 号
车轮半径	$r = 80 \text{ mm}$
前轮轮距	$2b = 460 \text{ mm}$
质心与前轮垂直距离	$d = 750 \text{ mm}$
状态加权矩阵	$R = \text{diag}(0.5, 0.5)$
输入加权矩阵	$Q = \text{diag}(0.5, 0.5, 0.5)$
预测时域	$N = 10$
采样时间	$\Delta = 0.2 \text{ s}$
初始状态	$(x_0, y_0, \varphi_0)^T = (-0.4, -0.8, \pi/2)^T$
速度输入约束	$0 \leq v \leq 3 \text{ m/s}$
角速度输入约束	$-3.5 \leq w \leq 3.5 \text{ rad/s}$

根据以上仿真条件, 假定有一参考轮式移动机器人匀速在期望路径上行驶, 移动速度 $v_R = 0.7 \text{ m/s}$, 并设定 $0.05 \leq v_R \cos \varphi_e \leq 0.7$, 结合期望路径和轮式移动机器人系统的约束条件, 根据式 (3.2.2) 确定多面体模型 (3.2.4) 的顶点矩阵为:

$$\begin{aligned}
 [A_1 \quad B_1] &= \begin{bmatrix} 0 & 3.5 & 0 & 1 & 0 \\ -3.5 & 0 & 0.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, [A_2 \quad B_2] = \begin{bmatrix} 0 & -3.5 & 0 & 1 & 0 \\ 3.5 & 0 & 0.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 [A_3 \quad B_3] &= \begin{bmatrix} 0 & 3.5 & 0 & 1 & 0 \\ -3.5 & 0 & 0.05 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, [A_4 \quad B_4] = \begin{bmatrix} 0 & -3.5 & 0 & 1 & 0 \\ 3.5 & 0 & 0.05 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

本节采用三种参考路径验证所提出的控制方案的有效性。在每一种路径测试下，先基于优化问题 2 求取非零终端算法的终端域和终端惩罚，然后分别基于优化问题 1 和优化问题 3，分别得到非零终端和零终端预测控制的仿真结果。

在每组路径仿真中，非零终端预测控制的终端惩罚和终端域基于优化问题 2 由式 (3.4.1) 给出：

$$E(\tilde{x}) := \tilde{x}^T P \tilde{x}, \quad \Omega := \{\tilde{x} \in R^n | E(\tilde{x}) \leq \alpha\}$$

$$P = \begin{bmatrix} 26.0275 & 0 & 0 \\ 0 & 28.1100 & 7.4889 \\ 0 & 7.4889 & 26.4983 \end{bmatrix}, \quad \alpha = 26 \quad (3.4.1)$$

注：对于不同的路径，优化问题 2 应该给出不同的终端域和终端惩罚函数。在不同路径下，本文此处求得的终端域和终端惩罚形式是相同的，这是因为所选择的三组期望路径的曲率具有相同的取值范围，即相同的道路参数约束集是造成这种结果的原因。

在每组路径仿真中，零终端预测控制的终端域被选择为各自的期望路径，其终端要素由式 (3.4.2) 给出：

$$\Omega := \mathbb{P}, \quad E(\cdot) = 0, \quad K(\cdot) = 0 \quad (3.4.2)$$

3.4.1 8 字路径

第一种测试路径为参考“8”字路径，这种路径的特点为曲率是时刻变化的：

$$x_R = 1.8 \sin \theta_k, \quad y_R = 1.2 \sin(2\theta_k). \quad (3.4.3)$$

分别求解优化问题 1 和优化问题 3，得到系统动态的仿真结果如图 3.2 和图 3.3，CPU 计算时间如表 3.4。

表 3.4 CPU 计算时间

	非零终端	零终端
总计算时间	144.26 s	8845.86 s
单步平均	0.1443 s	118.46 s

图 3.2 中，实线为参考路径，点虚线为基于终端不等式约束的 NMPC 系统轨迹，虚线为基于终端等式约束的 NMPC 系统轨迹。图 3.3 中，虚线为基于终端不等式约束的 NMPC 仿真结果，实线为基于终端等式约束的 NMPC 仿真结果。图 3.2 和图 3.3 表明，基于终端不等式约束的 NMPC 方案和基于终端等式约束的 NMPC 方案均使机器人

的实际路径能够在容许控制输入作用下很好地跟踪参考 8 字曲线，并且各状态的偏差可以渐近收敛至零。尽管基于零终端的预测控制方案可以实现更小的跟踪偏差，但对比仿真过程中 CPU 全速工作时完成两种控制方案所花费的时间，等式约束明显加重了计算负担，使求解时间变长。

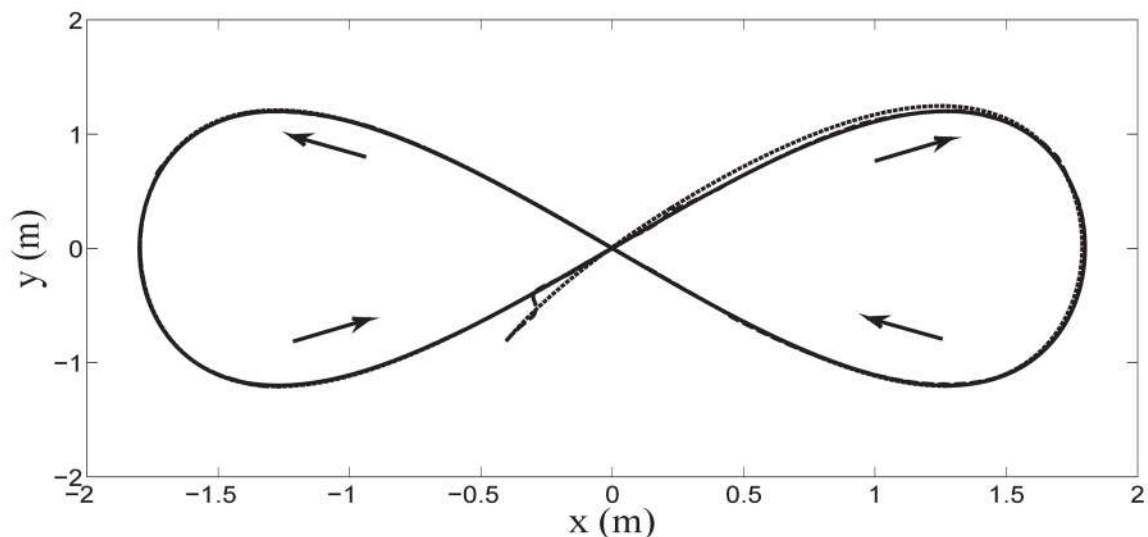


图 3.2 两种 NMPC 方案下的系统轨迹

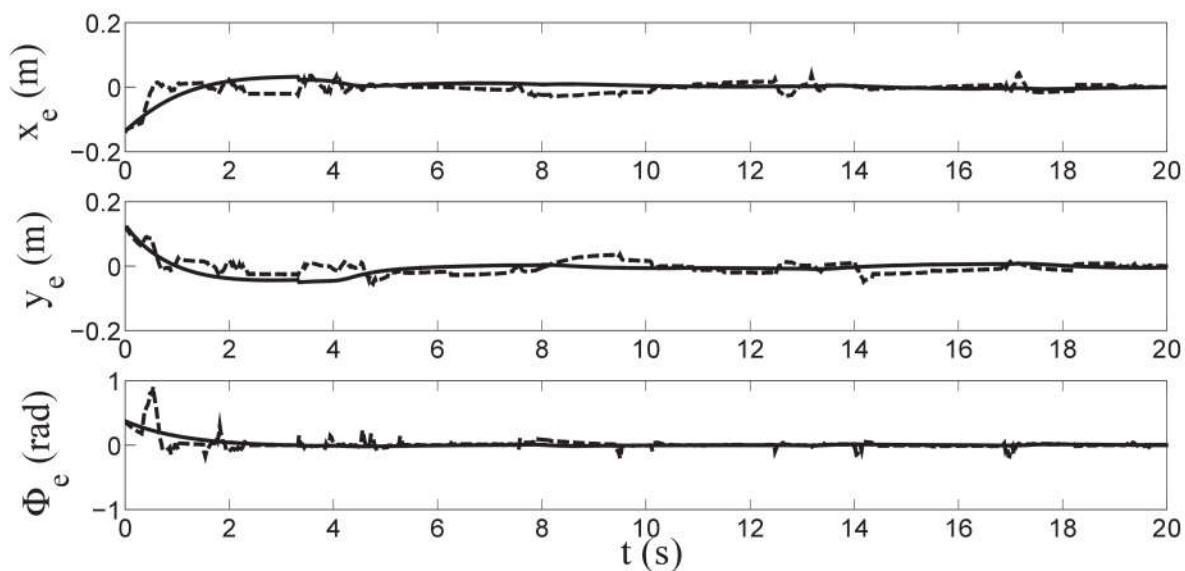


图 3.3 两种 NMPC 方案下的偏差状态

两种控制方案的控制输入 v 和 w 的仿真结果如图 3.4，根据仿真参数表 3.3 中的机

械参数，以及 $u = (v, w)^T$ 和 $u' = (w_l, w_r, \delta)^T$ 的关系式 (2.2.14) 可以得到面向执行机构的控制输入，如图 3.5。前轮转向角 δ 的确定方式是：根据左轮轮速 w_l 和右轮轮速 w_r 选取特定的前轮转向角令质心侧偏角始终为零，这种控制策略对轮式移动机器人的车身稳定性是有利的， $w_r - w_l = 0$ 也不会产生奇异点。图 3.4 和图 3.5 中，虚线为基于终端不等式约束的 NMPC 仿真结果，实线为基于终端等式约束的 NMPC 仿真结果。

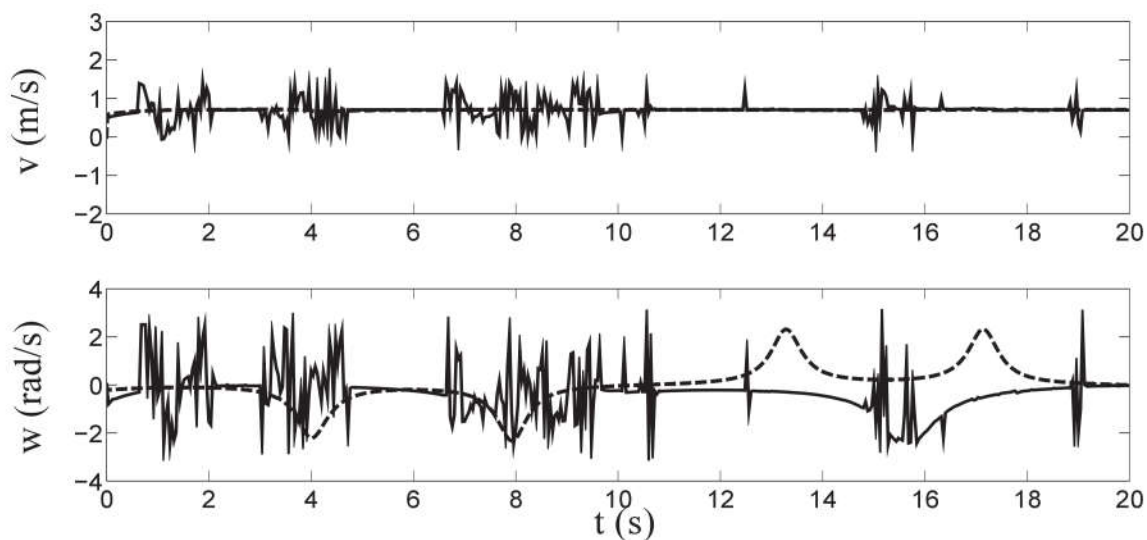


图 3.4 两种 NMPC 方案下的控制输入

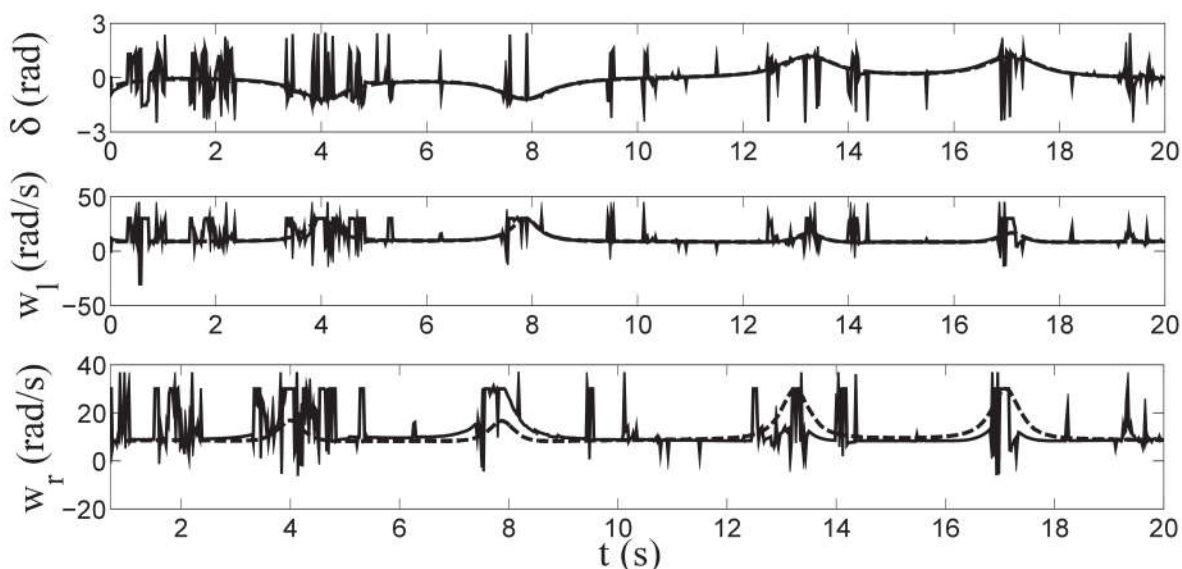


图 3.5 两种 NMPC 方案下的前轮转角和轮速

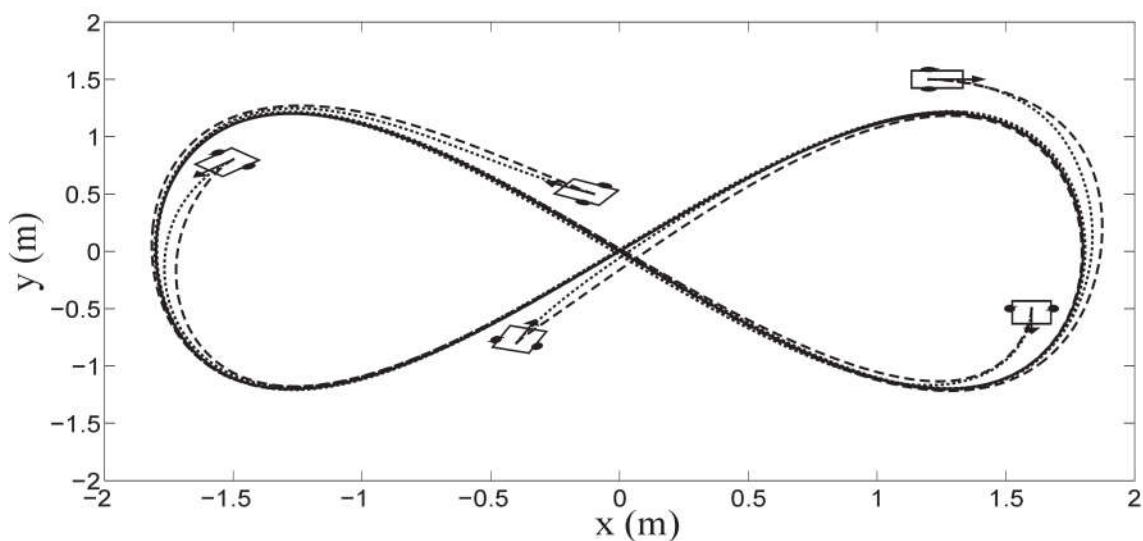


图 3.6 不同初始状态下的系统轨迹

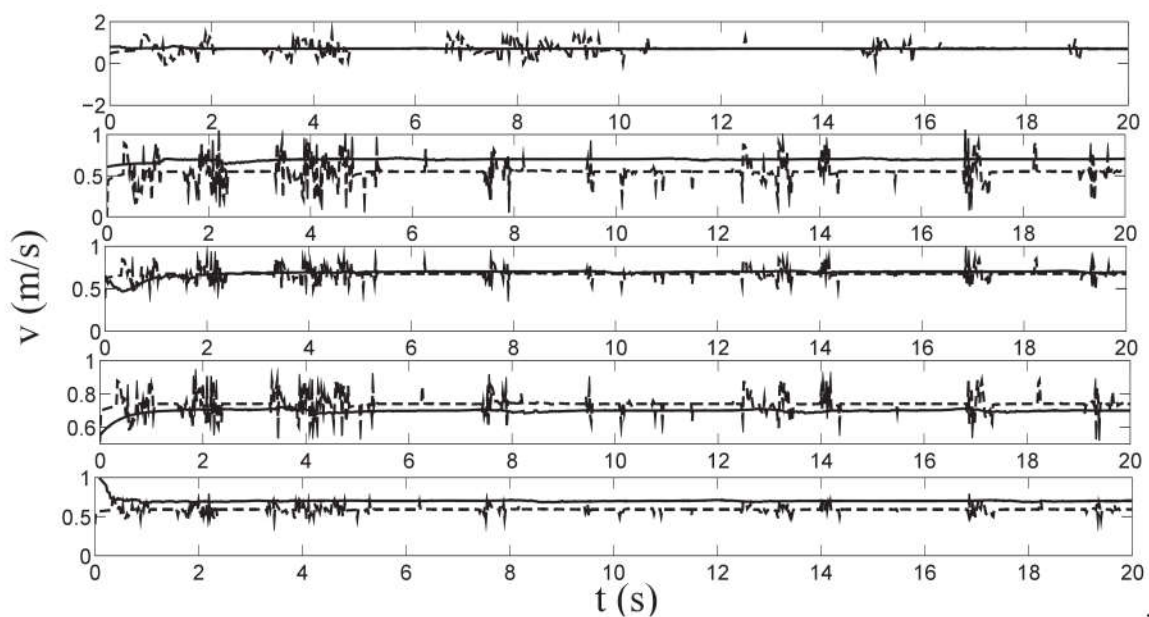


图 3.7 不同初始状态下的系统速度输入

图 3.4 和图 3.5 表明，两种 NMPC 方案均能保证控制输入满足约束条件，但非零终端预测控制的控制输入要比零终端预测控制的控制输入平滑，这是因为后者的等式约束使可行解的范围缩小，致使每一时刻的优化问题的可行解取值跳跃很大。

在 8 字参考路径下，验证不同初始状态下算法的有效性。图 3.6 给出了不同初始状态下的系统轨迹，其中实线为参考路径，点虚线为基于终端不等式约束的 NMPC 系统

轨迹，虚线为基于终端等式约束的 NMPC 系统轨迹。图 3.7 和图 3.8 分别给出了不同初始状态下的速度输入和角速度输入，其中实线均为基于终端不等式约束的 NMPC 仿真曲线，虚线均为基于终端等式约束的 NMPC 仿真曲线。根据图 3.6 ~ 图 3.8 可以得出结论：基于终端不等式约束的 NMPC 方案和基于终端等式约束的 NMPC 方案均可在不同的前进方向下，使轮式移动机器人的实际路径收敛于期望路径，并且控制输入均满足控制约束。

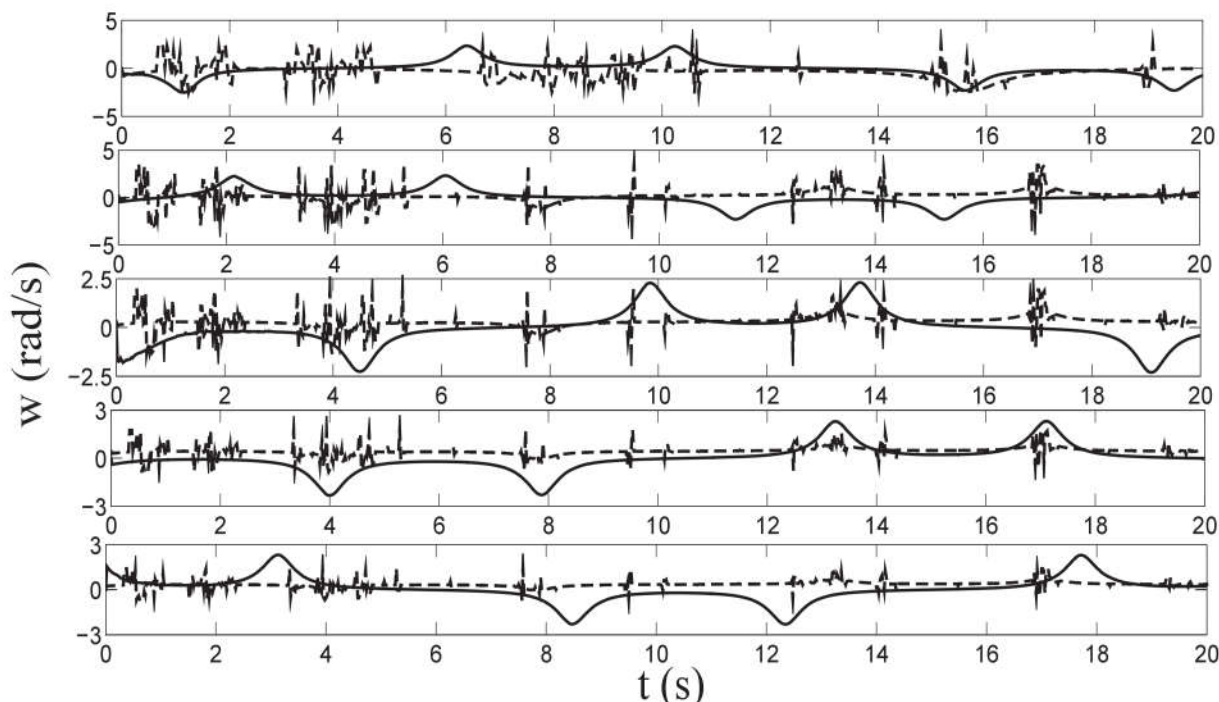


图 3.8 不同初始状态下的系统角速度输入

3.4.2 圆形路径

第二种仿真路径为圆形路径，由式 (3.4.4) 定义如下：

$$x_R = 1.2 \cos \theta_k, \quad y_R = 1.2 \sin \theta_k. \quad (3.4.4)$$

分别求解优化问题 1 和优化问题 3，图 3.9 给出了系统轨迹仿真曲线，其中实线为参考路径，点虚线为基于终端不等式约束的 NMPC 系统轨迹，虚线为基于终端等式约束的 NMPC 系统轨迹。图 3.10 给出了偏差状态的仿真曲线，实线为基于终端不等式约束的 NMPC 仿真曲线，虚线为基于终端等式约束的 NMPC 仿真曲线。仿真结果表明，基于终端不等式约束的 NMPC 控制器和基于终端等式约束的 NMPC 控制器具有相似的控制

性能：尽管在初始的跟踪阶段，轮式移动机器人的各位姿状态存在一定偏差，但是轮式移动机器人的实际路径均能最终渐近收敛于参考圆形路径，即各位姿状态偏差都能渐近收敛于零。

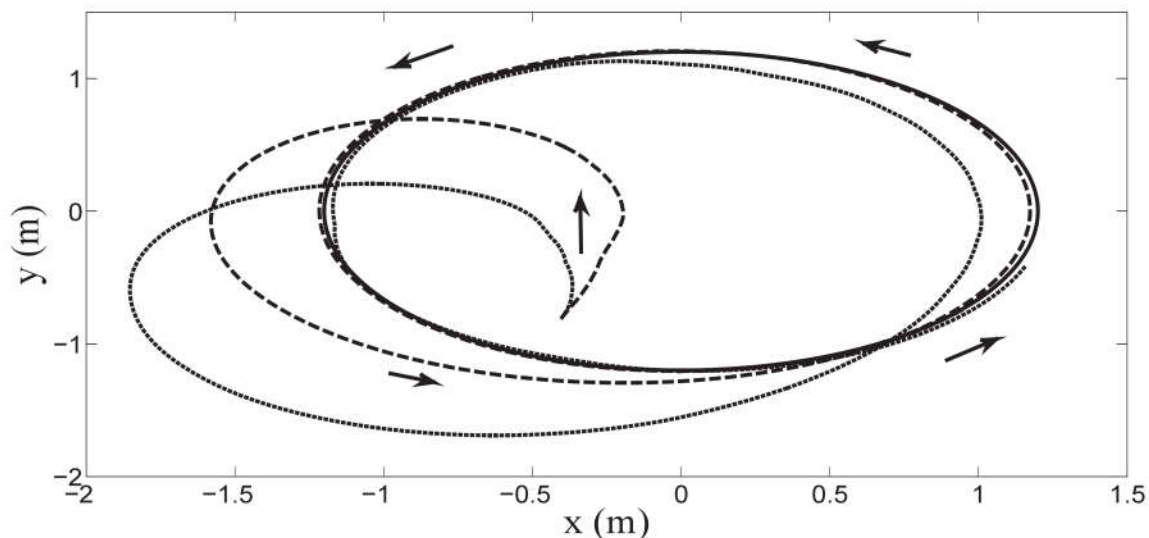


图 3.9 两种 NMPC 方案下的系统轨迹

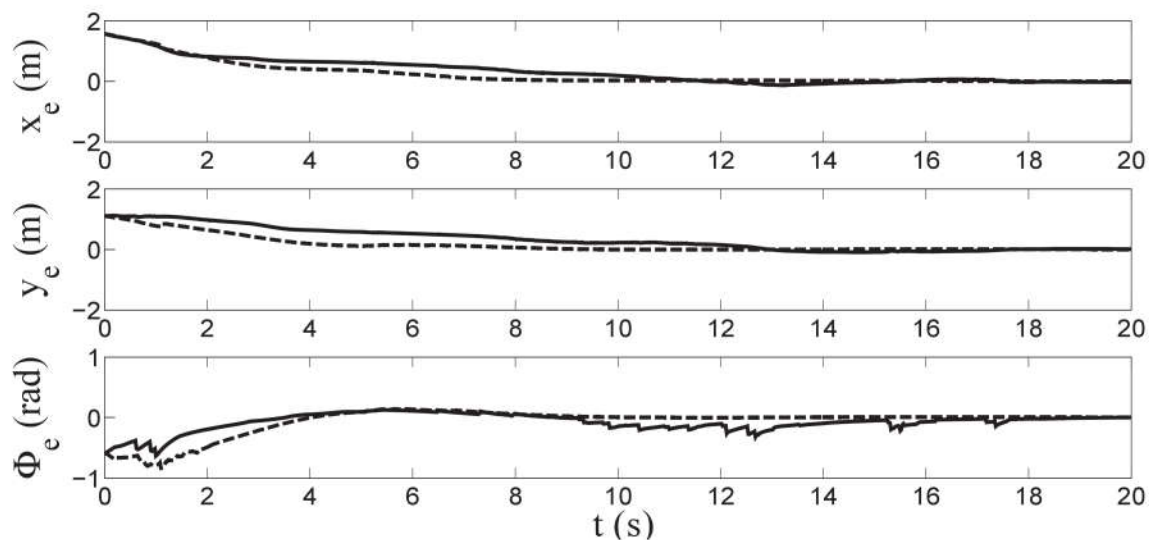


图 3.10 两种 NMPC 方案下的偏差状态

CPU 计算时间 (见表 3.5) 表明，基于终端等式约束的 NMPC 控制器虽然具有更好的路径跟踪精度，但等式约束加重了计算负担，求解时间长。

表 3.5 CPU 计算时间

	非零终端	零终端
总计算时间	393.75 s	4258.84 s
单步平均	0.3937 s	92.75 s

在圆形参考路径下，两种控制方案的控制输入仿真结果如图 3.11 和图 3.12 所示，两图中实线均为基于终端不等式约束的 NMPC 仿真曲线，虚线均为基于终端等式约束的 NMPC 仿真曲线。仿真结果表明两种 NMPC 方案均能保证控制输入在容许的范围内。同样，基于终端不等式约束的 NMPC 控制器的控制输入要比基于终端等式约束的 NMPC 控制器的控制输入平滑，增大控制加权矩阵 R 对角线上元素的值可以调整控制输入的平滑程度。

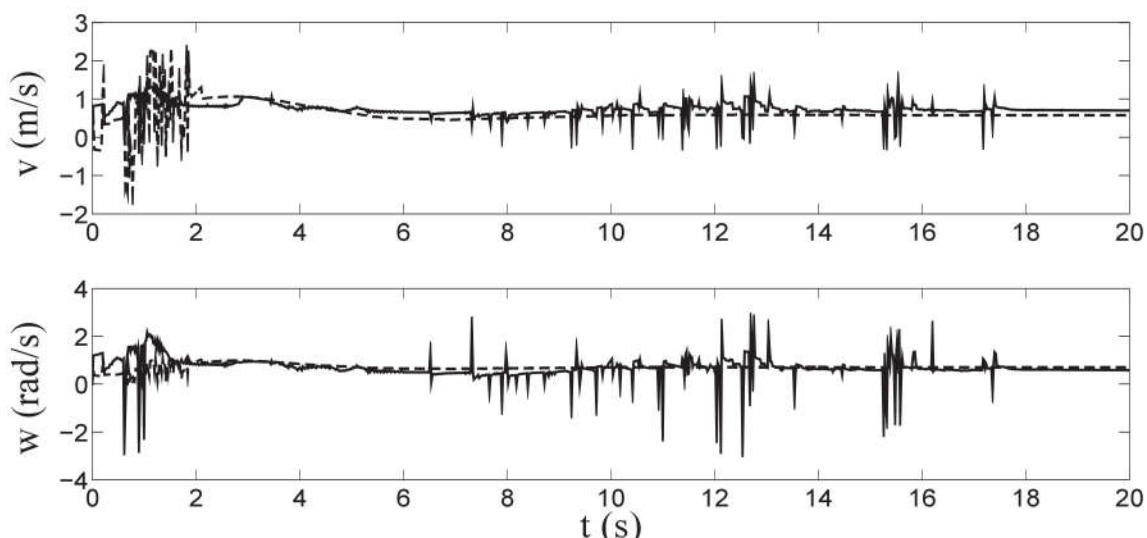


图 3.11 两种 NMPC 方案下的控制输入

3.4.3 直线路径

最后一条测试的参考路径含有直线部分，由式 (3.4.5) 给出：

$$\begin{aligned}
 x_R &= 1.8 \sin \theta_k, \\
 y_R &= \begin{cases} 1.2 \sin(2\theta_k), & 0 \leq \theta \leq \theta_l \\ 1, & \theta > \theta_l \end{cases} .
 \end{aligned} \tag{3.4.5}$$

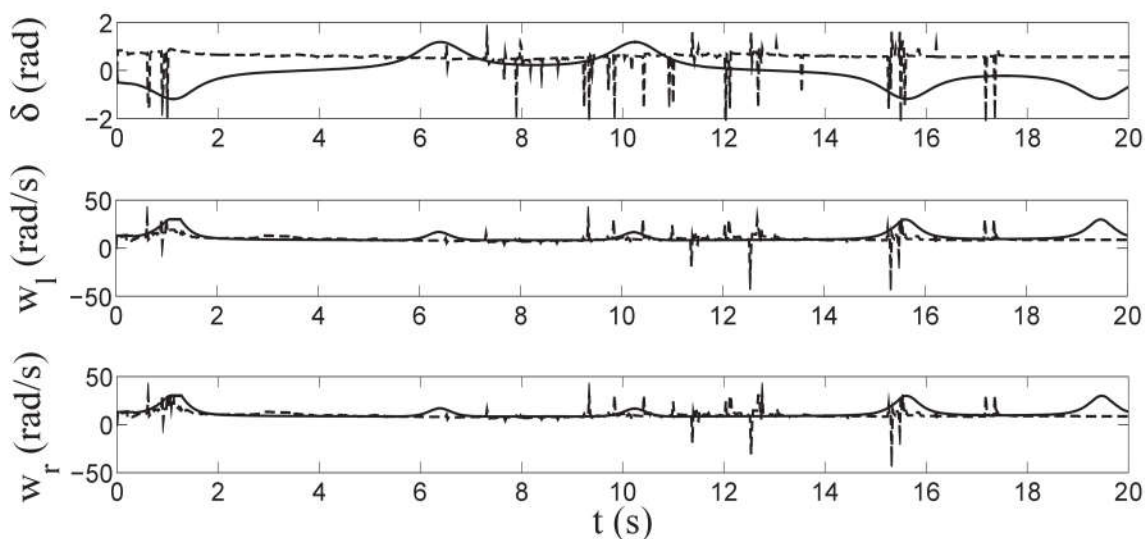


图 3.12 两种 NMPC 方案下的前轮转角和轮速

其中 θ_l 是具体的道路参数。因为式 (3.4.5) 是非光滑路径，只适用于基于终端等式约束的 NMPC 控制方案 [69]。仿真结果如图 3.13、图 3.14 和图 3.15 所示。图 3.13 中实线表示参考路径，虚线表示系统的实际轨迹。

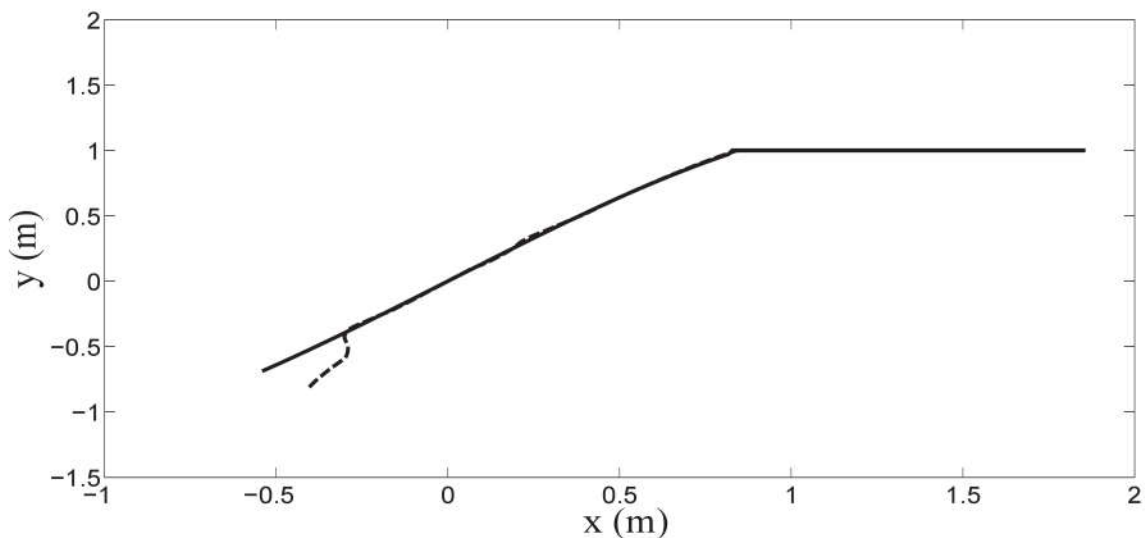


图 3.13 零终端预测控制下的系统轨迹

从以上的仿真结果可以看出，基于终端等式约束的 NMPC 方案可以在容许控制输入作用下使轮式移动机器人跟随期望路径。在进入第二段直线路径前，轮式移动机器人已经跟踪上期望路径。以上三组仿真实验表明，一旦轮式移动机器人在 NMPC 控制

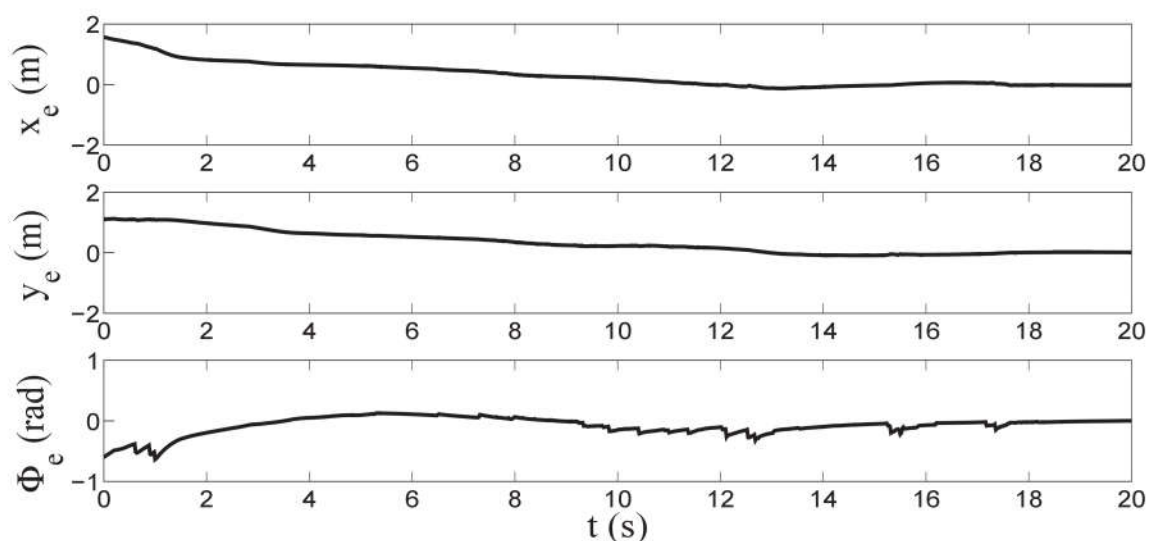


图 3.14 零终端预测控制下的偏差状态

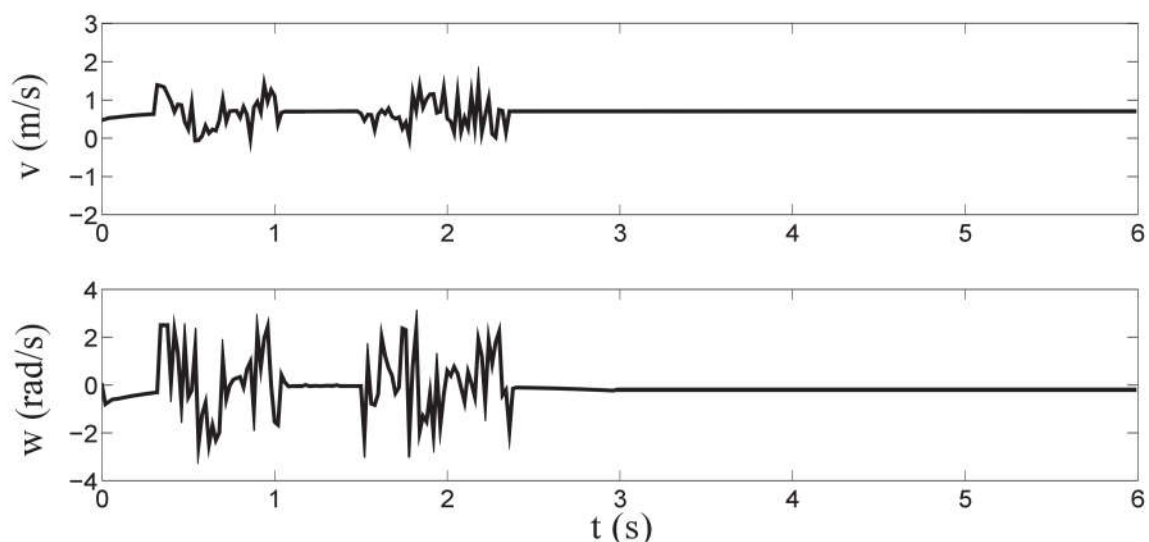


图 3.15 零终端预测控制下的控制输入

器作用下跟随上期望路径，将具备高精度的跟踪能力。

从以上三组仿真测试可以看出，为解决轮式移动机器人的路径跟踪问题而言，将参考路径选择为终端域的零终端预测控制是一种可行的方法，并且终端域的形式直接与参考路径有关，可以避免终端惩罚函数和终端约束集的复杂计算，从一定程度上简化了非线性模型预测控制器的设计。将两种控制方案进行对比分析，结论如下：

1. 系统动态：两种控制方案都可以在容许控制输入作用下使系统状态收敛于期望

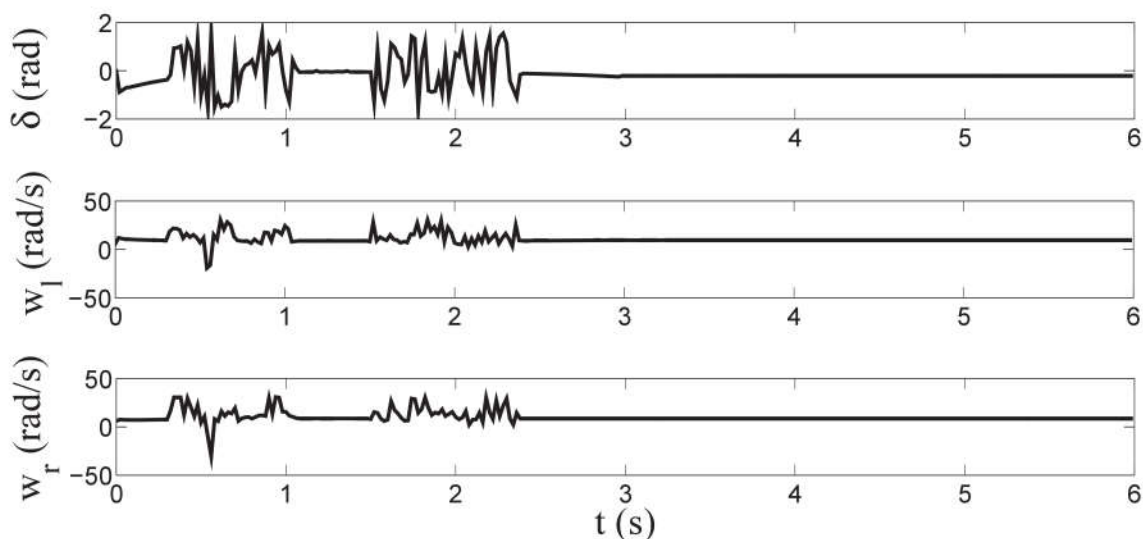


图 3.16 零终端预测控制下的前轮转角和轮速

路径，零终端预测控制的跟踪精度优于非零终端预测控制的跟踪精度。

2. 计算负担：非零终端预测控制的求解时间在可接受的范围内，而零终端预测控制的计算负担重，求解时间长，不能满足实物控制的实时性。

3. 非光滑路径：非零终端预测控制不适用于非光滑路径的跟踪问题，而零终端预测控制没有这样的限制。

3.5 本章小结

本章针对轮式移动机器人的路径跟踪控制问题，提出了基于终端不等式约束的 NMPC 控制方案和基于终端等式约束的 NMPC 控制方案，并讨论了上述两种控制方案的收敛性和可行性。最后在相同工况条件下，将两种控制方案应用于轮式移动机器人路径跟踪问题中，各测试路径下的仿真结果和计算时间体现了两种控制方案在系统动态和计算时间方面的不同特点。两种控制算法都可以在容许控制输入作用下使系统动态收敛于期望路径，虽然基于终端等式约束的 NMPC 方案可以避免终端要素的复杂计算，但在线求解具有终端不等式约束的优化问题要比求解具有终端等式约束的优化问题容易。

第4章 基于时变终端的 NMPC 路径跟踪控制

上一章借助非线性系统的多面体模型和线性矩阵不等式，确定了终端惩罚函数和终端域的优化方法，进而完善了基于终端不等式约束的 NMPC 方案。上一章的仿真实验表明，基于终端不等式约束的 NMPC 方案不能解决非光滑路径的跟踪问题，虽然基于终端等式约束的 NMPC 方案没有这样的限制，但该方案的计算负担重、在线求解时间长，在现行的硬件结构下，无法应用于实际系统。因此，本章将延续终端域优化方法，并在此基础上提出时变终端预测控制和分段终端预测控制，以解决上述问题并兼顾路径跟踪问题的时变性。

4.1 时变终端预测控制

在基于终端惩罚函数和终端约束集的预测控制方案中，终端惩罚函数、终端域和终端控制器一般在优化问题求解前离线计算好，这种作法的弊端是得出的吸引域很小。另一方面，由于参考几何路径是实时变化的，即使对线性时不变系统来说，路径跟踪问题也是时变的控制问题。在基于终端不等式约束的 NMPC 方案和基于终端等式约束的 NMPC 方案中，终端域一旦离线确定，在整个优化问题求解的过程中便固定不变，因而具有保守性。

4.1.1 时变终端约束集

国外学者 Timm 于 2012 年在其博士论文中提出时变终端的概念。由于在标准的 NMPC 结构中，终端域定义中的正标量 α 离线确定后保持不变，限制了终端约束集的大小。为了减小或消除固定终端在优化问题求解过程中的保守性，Timm 的博士论文提出在优化问题中采用时变的终端不等式约束

$$\Omega_{k,v,\pi} := \{\tilde{x} \in R^n \mid V(k, \tilde{x}) \leq \pi_k^2\}, \quad (4.1.1)$$

其中 $\pi_k > 0$ 是时变的。这样在每一采样时刻，由式 (4.1.1) 确定的时变终端域可以看作是中心在参考路径上的一系列椭球体，如图 4.1 所示。然后，Timm 将每一采样时刻的椭球体的体积“尽可能地大”设为目标函数，将决策时变终端域参数 π_k 的任务归结为另一附加的在线优化问题，进而提出了基于时变终端域的路径跟踪预测控制。但他采用该方法跟踪的是一条已知的渐近常量参考轨迹，并不是一条几何曲线路径。

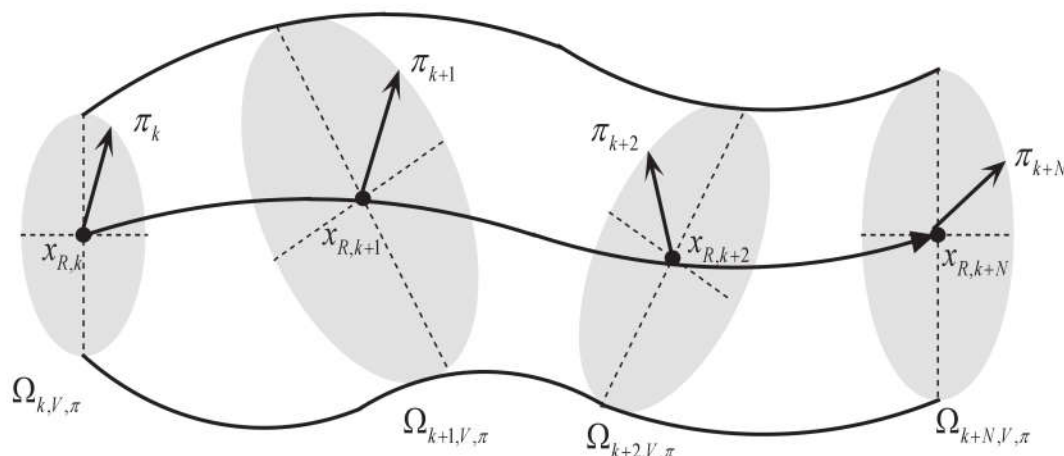


图 4.1 时变的终端不等式约束集

受上述时变终端思想的启发，并且基于上一章的终端域优化方法，本章拟将基于时变终端约束 NMPC 方法应用于轮式移动机器人的路径跟踪问题中，同时基于非线性系统的多面体模型和线性矩阵不等式获得每一采样时刻的 NMPC 优化问题的时变终端约束集。为了更好地阐述本章提出的时变终端预测控制，首先简要回顾基于终端不等式约束的 NMPC 方案中终端约束集的确定方法。将轮式移动机器人偏差系统的动力学方程 (3.2.1) 沿期望路径线性化后，其 Jacobian 矩阵如下：

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial \tilde{x}_1} & \frac{\partial F}{\partial \tilde{x}_2} & \frac{\partial F}{\partial \tilde{x}_3} & \frac{\partial F}{\partial \tilde{u}_1} & \frac{\partial F}{\partial \tilde{u}_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & c(\theta)v & 0 & 1 & 0 \\ -c(\theta)v & 0 & v_R \sin \tilde{x}_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.1.2)$$

根据式 (4.1.2)，非线性系统 (3.2.1) 的多面体模型的顶点可以通过 v 和 $c(\theta)$ 的边界值获得， v 和 $c(\theta)$ 都是有界变量，它们的取值范围由期望的几何路径决定。在控制器设计过程中，将终端惩罚函数和终端域的计算问题转化为基于 LMI 描述的优化问题。如果包含于多面体内的所有系统都满足定理 2 中的约束条件 (3.2.6)，那么通过优化问题 2 求解得出的终端要素将满足定理 1 中的收敛性条件。因此，基于终端不等式约束的 NMPC 方案，需要先离线求解优化问题 2 获得满足条件的终端要素，然后在线求解 NMPC 优化问题获得最优输入，实现轮式移动机器人的路径跟踪控制，见表 3.1。

然而，在求解终端域的过程中，要求多面体模型的各项点同时满足 LMI 约束条件 (3.2.6)，实质上是取所有包含于多面体内的系统满足不等式条件的解集的交集，这对于时变的路径跟踪问题而言存在很强的保守性。在本文设计的路径跟踪控制系统中，NMPC 控制器基于预测模型可以进行状态预测，这意味着 NMPC 控制器在预测状态轨迹时可以预测参考处的路径曲率，结合式 (4.1.2)，本章根据当前路径参考点的路

径曲率计算当前系统对应的多面体模型，再通过优化问题 2 获得当前路径参考点曲率下的终端惩罚函数 E_k 和终端域 Ω_k 。由于每一时刻的参考点曲率不同，从而获得时变终端要素。

本章提出的基于时变终端不等式约束的 NMPC 方案的数学描述归纳如下：

优化问题 4: (基于时变终端不等式约束的 NMPC 方案)

$$\underset{u_{k+i|k}, v_{k+i|k}, \theta_{k+i|k}}{\text{minimize}} \quad J(x_{k|k}, u_{k+i|k}, v_{k+i|k}, \theta_{k+i|k}) \quad (4.1.3)$$

满足约束条件：

$$x_{k+i+1|k} = f(x_{k+i|k}, u_{k+i|k}), \quad x_{k|k} = x_k, \quad (4.1.4a)$$

$$x_{k+i|k} \in X, \quad u_{k+i|k} \in U, \quad (4.1.4b)$$

$$\tilde{x}_{k+i|k} = x_{k+i|k} - p(\theta_{k+i|k}), \quad (4.1.4c)$$

$$\tilde{x}_{k+N|k} \in \Omega_k, \quad (4.1.4d)$$

$$\theta_{k+i+1|k} = g(\theta_{k+i|k}, v_{k+i|k}), \quad \theta_{k|k} = \theta_k, \quad (4.1.4e)$$

$$\theta_{k+i|k} \in \Theta, \quad v_{k+i|k} \in V, \quad (4.1.4f)$$

其中：

$$J(\tilde{x}_{k+i|k}, \tilde{u}_{k+i|k}) = \sum_{i=0}^{N-1} \left(\|\tilde{x}_{k+i|k}\|_Q^2 + \|\tilde{u}_{k+i|k}\|_R^2 \right) + E_k(\tilde{x}_{k+N|k}). \quad (4.1.5)$$

表 4.1 时变终端预测控制算法流程

优化算法 4	基于时变终端不等式约束的 NMPC 方案
1:	初始化 $k = 0$ ，预瞄系统状态 x_k
2:	while $k < T_{final}$
3:	计算当前参考点的曲率 $c(\theta_k)$ ，基于优化问题 2 获得满足条件的 P_k 和 α_k
4:	基于 (4.1.6) 求解优化问题 4，获得可行解（次优解） $u_{k+i k}, v_{k+i k}, \theta_{k+i k}$
5:	$u_k = u_{k k}$ 作用于系统，更新系统动态
6:	更新道路参数 θ_{k+1} ，测量系统状态 x_{k+1}
7:	$k \leftarrow k + 1$
8:	end while

在上述基于时变终端不等式约束的 NMPC 方案中，终端惩罚函数 $E_k(\tilde{x})$ 和终端域 Ω_k 定义如下：

$$E_k(\tilde{x}) := \tilde{x}^T P_k \tilde{x}, \quad \Omega_k := \{\tilde{x} \in R^n \mid \tilde{x}^T P_k \tilde{x} \leq \alpha_k\} \quad (4.1.6)$$

其中终端惩罚矩阵 P_k 和标量 α_k 是根据当前路径参考点的曲率 $c(\theta_k)$ ，求解优化问题 2 得到的。基于时变终端不等式约束的 NMPC 方案不仅可以利用 NMPC 在线优化和滚动控制的优点，又兼顾了路径跟踪问题的时变实质，并且同离线计算的固定终端相比，可以减小由约束条件 (3.2.6) 引入的保守性。NMPC 控制器的具体执行流程如表 4.1，其中 T_{final} 为系统仿真时间。

4.1.2 仿真验证

采用由式 (3.4.3) 定义的“8”字路径测试上小节提出的时变终端预测控制，此几何参考路径的曲率是时刻变化的，可以很好的验证基于时变终端不等式约束的 NMPC 方案，仿真参数和第 3.4 节相同，见表 3.3。仿真结果如图 4.2 至图 4.5 所示。

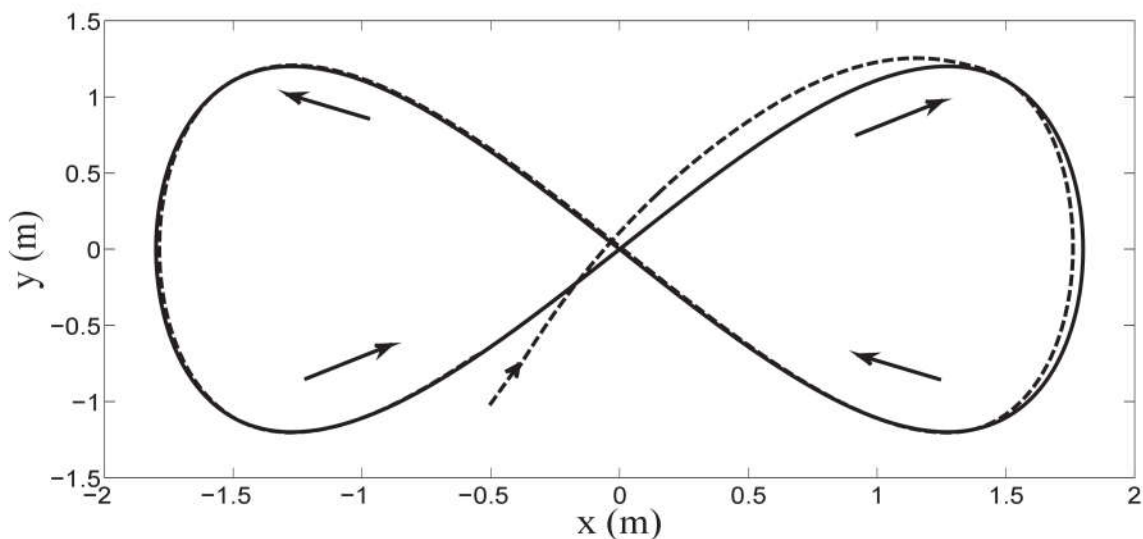


图 4.2 时变终端预测控制下的系统轨迹

图 4.2 中实线为参考路径，虚线为系统的实际轨迹。图 4.3 给出了系统偏差状态的仿真曲线。图 4.4 给出了系统的速度输入 v 和角速度输入 w 的仿真曲线。图 4.5 给出了系统前轮转角 δ 和轮速 w_l, w_r 的仿真曲线。仿真结果表明，采用时变终端不等式约束的 NMPC 方案对于解决时变的路径跟踪问题是可行的。时变终端预测控制可以使运动

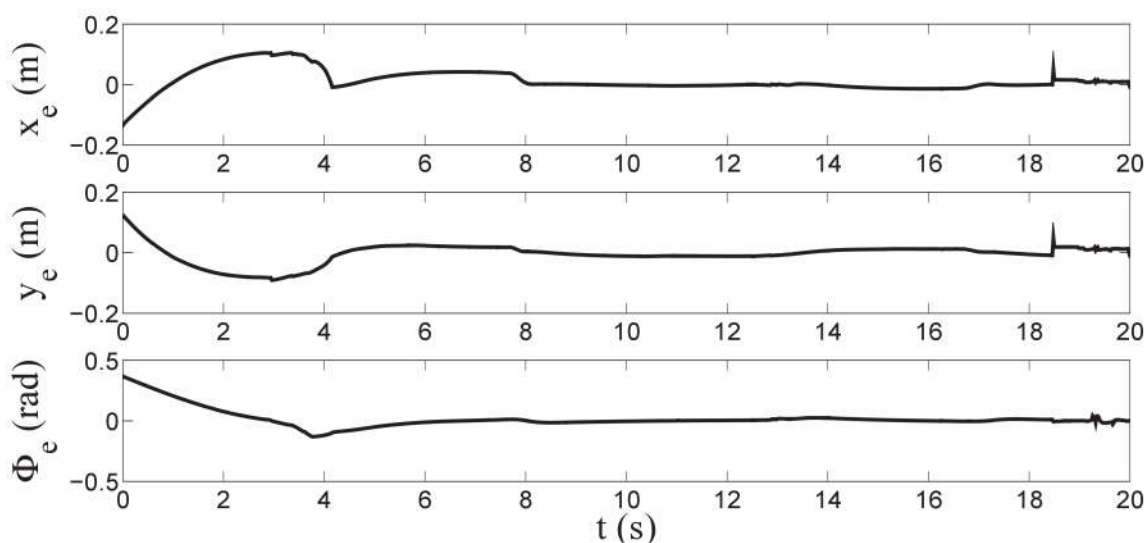


图 4.3 时变终端预测控制下的偏差状态

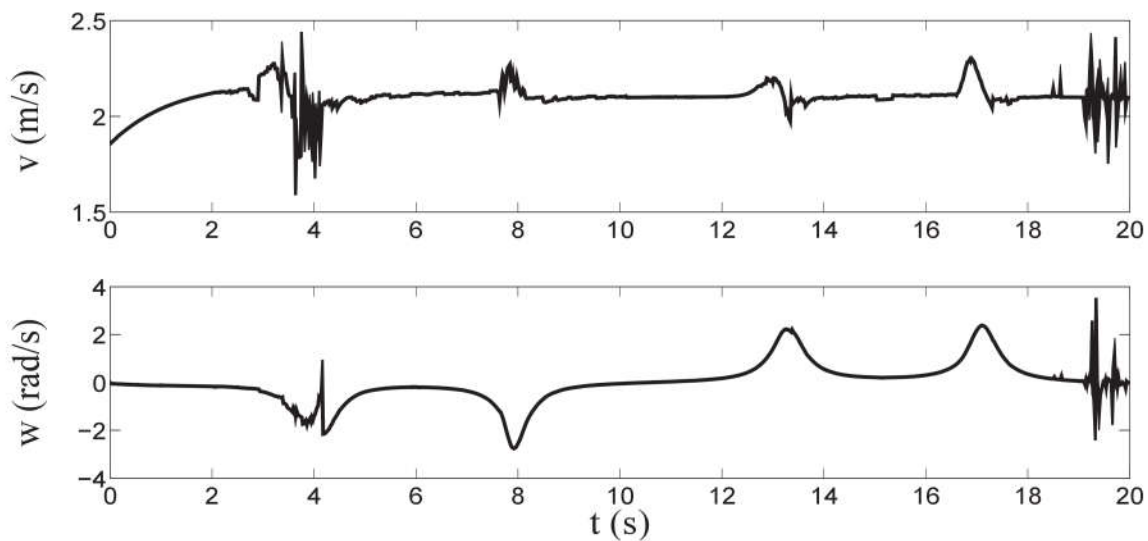


图 4.4 时变终端预测控制下的控制输入

对象跟踪期望的“8”字路径，尤其是在跟踪的中后期具有很高的跟踪精度，各位姿态状态的偏差可以渐近收敛于零，同时满足状态约束和输入约束。

由于采样点数目很大，为了便于展示，图 4.6 仅选取一段期望路径(实线)和实际路径(点虚线)上的终端域进行说明。本文的位姿状态是三维向量，根据当前路径参考点的路径曲率求解优化问题 2 可以获得时变终端约束集，它们是一系列中心在参考路径上的椭球体。图 4.6 展示的是这些时变的椭球体在 $x-y$ 平面上的投影。图 4.7 给出了

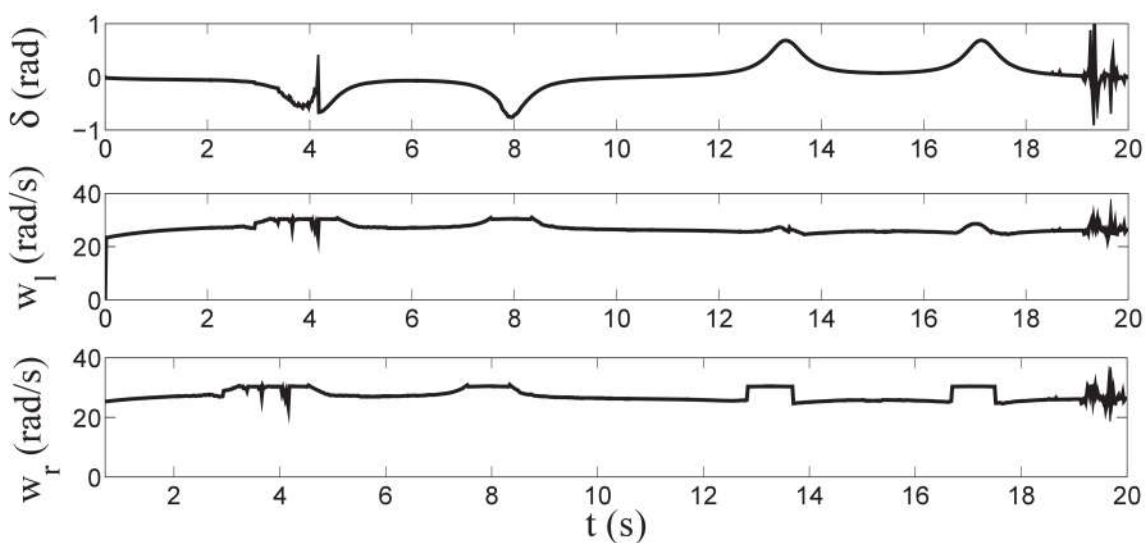


图 4.5 时变终端预测控制下的前轮转角和轮速

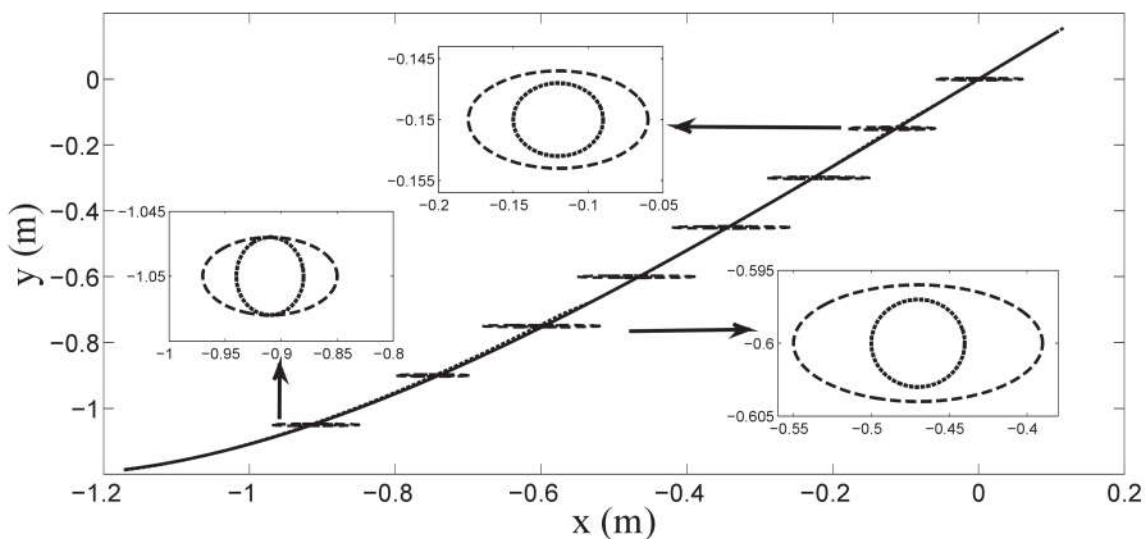


图 4.6 时变终端约束集

终端域 Ω_k 定义中的正标量 α_k 的时变曲线。

在图 4.6 的放大图中，点线表示通过优化问题 2 离线计算的固定终端，虚线表示时变终端预测控制的终端域。从图 4.6 可以看出，同离线计算的固定终端相比，时变终端预测控制扩大了优化问题每一时刻的终端域，进而能够扩大优化问题的可行解范围，这对在线求解 NMPC 优化问题而言是有利的，在满足控制性能需求的同时兼顾了路径跟踪问题的时变特性。然而，本节仅针对轮式移动机器人的路径跟踪问题提出了时变

终端预测控制的解决方案，并通过仿真实验验证了该控制策略的有效性，但时变终端预测控制方案在理论上如何保证优化问题的递推可行性仍有待完善。

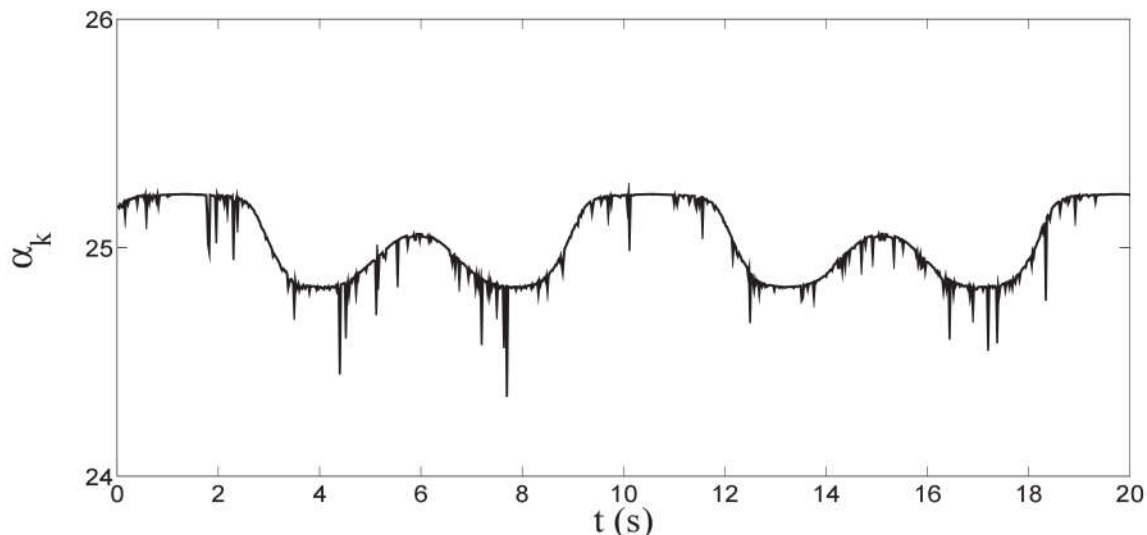


图 4.7 α_k 的时变曲线

4.2 分段终端预测控制

NMPC 具备在线优化和滚动控制的特点，因此其控制器的在线求解能力直接关系到 NMPC 能否成功应用于实际系统中。目前仍缺乏求解非线性预测控制中的优化问题的有效方法，这是因为 NMPC 需要在有限的优化间隔内求解一个非凸的非线性优化问题。进一步，为保证优化问题的可行性和对期望路径的收敛性而引入的终端约束又增加了数值求解的计算量。因此，NMPC 中的优化问题求解也是理论研究的重要内容，获得了国内外学者的广泛关注。具体的解决方法主要有控制器简化设计（例如控制器参数化或线性化设计），有效的数值求解方法（算法层面），或者利用微型芯片特有的存储器并行运算能力提高在线运算速度（硬件加速）。学者 Timm 提出时变终端的初衷是想扩大终端域的范围，进而扩大可行解的范围，通过减小预测时域，从而降低在线计算负担。在每一采样时刻，时变终端预测控制在基于终端不等式约束的 NMPC 基础上附加了另一个在线求解的约束优化问题，见表 4.1，因而会加重计算负担。

本文的第 4.1 节验证了时变终端预测控制解决路径跟踪问题的有效性，没有考虑算法的计算负担，并且没有讨论闭环系统的性能。时变终端要素是根据不同采样时刻的参考点曲率通过求解优化问题 2 获得的，在时变终端预测控制的仿真中，我们发现当曲

率在很小范围内变化时, 式 (4.1.6) 中的终端惩罚矩阵 P_k 和标量 α_k 的值差别不大, 因此对控制性能的影响也不显著。基于这样的事实并结合查表的思想, 兼顾算法负担和控制性能需求, 在非零终端预测控制离线计算终端惩罚函数和终端约束集的基础上, 根据 4.1 节所提出的时变思想提出时变终端的改进算法—分段终端预测控制。

4.2.1 系统方案及性能分析

将轮式移动机器人偏差系统的动力学方程 (3.2.1) 沿期望路径线性化后, 其 Jacobian 矩阵如下

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial \tilde{x}_1} & \frac{\partial F}{\partial \tilde{x}_2} & \frac{\partial F}{\partial \tilde{x}_3} & \frac{\partial F}{\partial \tilde{u}_1} & \frac{\partial F}{\partial \tilde{u}_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & c_\ell(\theta)v & 0 & 1 & 0 \\ -c_\ell(\theta)v & 0 & v_R \sin \tilde{x}_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.2.1)$$

根据路径曲率将期望路径分为 d 段, $c_\ell(\theta)$, $\ell = 1, 2, \dots, d$ 代表分段曲率。根据分段曲率 $c_\ell(\theta)$ 的取值范围, 由 q 个顶点矩阵 $[A_{p,\ell} \ B_{p,\ell}]$, $p = 1, 2, \dots, q$ 确定的凸包 Σ_ℓ 定义如下

$$\Sigma_\ell := \text{Co}\{[A_{1,\ell} \ B_{1,\ell}], [A_{2,\ell} \ B_{2,\ell}], \dots, [A_{q,\ell} \ B_{q,\ell}]\} \quad (4.2.2)$$

在式 (4.2.2) 中, 为了叙述方便, 假设每段路径下凸包的顶点矩阵个数 q 相同。当路径参数 θ_k 沿期望路径变化时, 偏差系统 (3.2.4) 的系统矩阵 $[A_\ell(c_\ell) \ B_\ell(c_\ell)] \in \Sigma_\ell$ 且满足

$$[A_\ell(c_\ell) \ B_\ell(c_\ell)] = \sum_{p=1}^q \lambda_{p,\ell} [A_{p,\ell} \ B_{p,\ell}], \quad \lambda_{p,\ell} \geq 0, \quad \sum_{p=1}^q \lambda_{p,\ell} = 1 \quad (4.2.3)$$

可见, 系统矩阵 $[A_\ell(c_\ell) \ B_\ell(c_\ell)]$ 由时变路径参数 θ_k 确定, 此时偏差系统 (3.2.4) 是参变系统。根据路径曲率将期望路径分为 d 段, 意味着需要确定 d 个多面体描述 $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_d$, 即 Σ_ℓ 也是时变的。同确定一个如式 (3.2.3) 的时不变多面体 Σ 相比, Σ_ℓ 可以反映出非线性系统 (3.2.4) 的时变特性, 从而减小了保守性。

基于分段终端不等式约束的 NMPC 方案的数学描述归纳如下:

优化问题 5: (基于分段终端不等式约束的 NMPC 方案)

$$\underset{u_{k+i|k}, v_{k+i|k}, \theta_{k+i|k}}{\text{minimize}} \quad J(x_{k|k}, u_{k+i|k}, v_{k+i|k}, \theta_{k+i|k}) \quad (4.2.4)$$

满足约束条件:

$$x_{k+i+1|k} = f(x_{k+i|k}, u_{k+i|k}), \quad x_{k|k} = x_k, \quad (4.2.5a)$$

$$x_{k+i|k} \in X, \quad u_{k+i|k} \in U, \quad (4.2.5b)$$

$$\tilde{x}_{k+i|k} = x_{k+i|k} - p(\theta_{k+i|k}), \quad (4.2.5c)$$

$$\tilde{x}_{k+N|k} \in \Omega_\ell, \quad (4.2.5d)$$

$$\theta_{k+i+1|k} = g(\theta_{k+i|k}, v_{k+i|k}), \quad \theta_{k|k} = \theta_k, \quad (4.2.5e)$$

$$\theta_{k+i|k} \in \Theta, \quad v_{k+i|k} \in V, \quad (4.2.5f)$$

其中:

$$J(\tilde{x}_{k+i|k}, \tilde{u}_{k+i|k}) = \sum_{i=0}^{N-1} \left(\|\tilde{x}_{k+i|k}\|_Q^2 + \|\tilde{u}_{k+i|k}\|_R^2 \right) + E_\ell(\tilde{x}_{k+N|k}). \quad (4.2.6)$$

每段曲率 $c_\ell(\theta)$ 下的终端惩罚函数 $E_\ell(\tilde{x})$ 和终端域 Ω_ℓ 定义如下

$$E_\ell(\tilde{x}) := \tilde{x}^T P_\ell \tilde{x}, \quad \Omega_\ell := \{\tilde{x} \in R^n \mid \tilde{x}^T P_\ell \tilde{x} \leq \alpha\} \quad (4.2.7)$$

对于周期变化的路径, 定义

$$P_{\ell+d} = P_\ell, \quad \Omega_{\ell+d} = \Omega_\ell, \quad \forall k > 0 \quad (4.2.8)$$

式 (4.2.7) 中的标量 α 和终端惩罚矩阵 P_ℓ , $\ell = 1, 2, \dots, d$, 需要满足定理 5 中的线性矩阵不等式条件。

定理 5 (分段终端预测控制方案的可行性和收敛性)

给定状态加权矩阵 $Q \in R^{3 \times 3}$, 输入加权矩阵 $R \in R^{2 \times 2}$ 和非线性系统 (3.2.1) 的多面体描述集合 (4.2.2)。假设对所有的 $p = 1, 2, \dots, q$, $\ell = 1, 2, \dots, d$ 存在正定对称矩阵 $X_\ell \in R^{3 \times 3}$, 矩阵 $Y_\ell \in R^{2 \times 3}$ 和常数 $\alpha > 0$ 满足

$$\begin{bmatrix} X_\ell & * & * & * \\ A_{p,\ell}X_\ell + B_{p,\ell}Y_\ell & X_\ell & * & * \\ Q^{\frac{1}{2}}X_\ell & 0 & \alpha I & * \\ R^{\frac{1}{2}}Y_\ell & 0 & 0 & \alpha I \end{bmatrix} \geq 0, \quad (4.2.9)$$

$$\begin{bmatrix} X_\ell & * & * & * \\ A_{p,\ell}X_\ell + B_{p,\ell}Y_\ell & X_{\ell+1} & * & * \\ Q^{\frac{1}{2}}X_\ell & 0 & \alpha I & * \\ R^{\frac{1}{2}}Y_\ell & 0 & 0 & \alpha I \end{bmatrix} \geq 0, \quad (4.2.10)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_i^2 & e_i^T X_\ell \\ * & X_\ell \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.2.11)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{u}_j^2 & e_j^T Y_\ell \\ * & X_\ell \end{bmatrix} \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (4.2.12)$$

并且优化问题 5 在初始时刻 $k = 0$ 有可行解。令终端惩罚矩阵 $P_\ell = \alpha X_\ell^{-1}$, 终端控制律 $u_{F,\ell}(\tilde{x}) := Y_\ell X_\ell^{-1} \tilde{x}$, 则

(1) 优化问题 5 对任意 $k \geq 0$ 都是可行的;

(2) 当 $k \rightarrow \infty$, 基于优化问题 5 的 NMPC 方案能够使系统的状态轨迹渐近收敛于期望路径 \mathbb{P} 。

注: 式 (4.2.11) 中的 \hat{x}_i, e_i 和式 (4.2.12) 中的 \hat{u}_j, e_j 符号含义, 分别与第 3.2.1 小节中的式 (3.2.16) 和式 (3.2.21) 一致。

证明 定义终端控制器的反馈增益为 $K_\ell = Y_\ell X_\ell^{-1}$, 可见终端控制律也是分段时变的。同定理 2 的证明过程类似, 分别对式 (4.2.9) 和式 (4.2.10) 进行左乘和右乘对角矩阵 $\{X_\ell^{-1}, I, I, I\}$ 运算, 并应用 $Y_\ell = K_\ell X_\ell$ 和 Schur 补公式得

$$(A_{p,\ell}^T + K_\ell^T B_{p,\ell}^T)P_\ell(A_{p,\ell} + B_{p,\ell}K_\ell) - P_\ell + Q + K_\ell^T R K_\ell \leq 0, \quad (4.2.13a)$$

$$(A_{p,\ell}^T + K_\ell^T B_{p,\ell}^T)P_{\ell+1}(A_{p,\ell} + B_{p,\ell}K_\ell) - P_\ell + Q + K_\ell^T R K_\ell \leq 0, \quad (4.2.13b)$$

其中 $p = 1, 2, \dots, q$ 。对任意的 $\lambda_{p,\ell} \geq 0$, $\sum_{p=1}^q \lambda_{p,\ell} = 1$, 式 (4.2.13) 表明不等式

$$\sum_{p=1}^q \lambda_{p,\ell} ((A_{p,\ell}^T + K_\ell^T B_{p,\ell}^T)P_\ell(A_{p,\ell} + B_{p,\ell}K_\ell) - P_\ell + Q + K_\ell^T R K_\ell) \leq 0, \quad (4.2.14a)$$

$$\sum_{p=1}^q \lambda_{p,\ell} ((A_{p,\ell}^T + K_\ell^T B_{p,\ell}^T)P_{\ell+1}(A_{p,\ell} + B_{p,\ell}K_\ell) - P_\ell + Q + K_\ell^T R K_\ell) \leq 0, \quad (4.2.14b)$$

对于所有的 $\ell = 1, 2, \dots, d$ 都成立。

分段终端的思想是根据路径曲率将期望路径分为 d 段, 当非线性系统 (3.2.1) 在第 ℓ 段期望路径内运行时, 由于式 (4.2.14a) 成立, 很容易获得优化问题 5 在相邻时刻的可行性和最优值函数是单调递减的, 见定理 1 和定理 2 的证明过程。下面主要证明系统从第 ℓ 段路径进入第 $\ell + 1$ 段路径时, NMPC 在切换终端惩罚函数 $E_\ell(\tilde{x})$ 和终端域 Ω_ℓ 时, 优化问题 5 在相邻的切换时刻的可行性和最优值函数是不增的。

(1) 可行性

为了表述简洁, 设切换时刻为 $k' > 0$, 即系统在 k' 时刻的终端三要素为 P_ℓ 、 Ω_ℓ 和 K_ℓ , 系统在 $k' + 1$ 时刻的终端三要素为 $P_{\ell+1}$ 、 $\Omega_{\ell+1}$ 和 $K_{\ell+1}$, $\ell = 1, 2, \dots, d$ 。

非线性系统 (3.2.1) $\tilde{x}_{k'+1} = F(\tilde{x}_{k'}, K_\ell \tilde{x}_{k'})$ 在终端控制律 $u_{F,\ell}(\tilde{x})$ 作用下, 根据式 (4.2.14b) 可知

$$\tilde{x}_{k'+1}^T P_{\ell+1} \tilde{x}_{k'+1} + \tilde{x}_{k'}^T (Q + K_\ell^T R K_\ell - P_\ell) \tilde{x}_{k'} \leq 0 \quad (4.2.15)$$

对所有的切换时刻 $k' > 0$ 成立。易知

$$\tilde{x}_{k'+1}^T P_{\ell+1} \tilde{x}_{k'+1} < \tilde{x}_{k'}^T P_\ell \tilde{x}_{k'}, \quad \forall k' > 0, \quad (4.2.16)$$

因此, 如果偏差系统状态 $\tilde{x}_{k'}$ 在终端域 Ω_ℓ 内

$$\Omega_\ell = \{\tilde{x} \in R^n \mid \tilde{x}^T P_\ell \tilde{x} \leq \alpha\}, \quad (4.2.17)$$

则 $\tilde{x}_{k'+1}$ 在椭球体 $\Omega_{\ell+1}$ 内

$$\Omega_{\ell+1} = \{\tilde{x} \in R^n \mid \tilde{x}^T P_{\ell+1} \tilde{x} \leq \alpha\}. \quad (4.2.18)$$

设优化问题 5 在 k' 时刻的可行解 $\tilde{U}_{k'}^* \in \tilde{U}$ 为

$$\tilde{U}_{k'}^* = [\tilde{u}_{k'|k'}^*, \tilde{u}_{k'+1|k'}^*, \dots, \tilde{u}_{k'+N-1|k'}^*]. \quad (4.2.19)$$

在 $\tilde{U}_{k'}^*$ 作用下, 系统 (2.1.1) 在预测时域内的状态轨迹应满足状态约束, 与可行解 $\tilde{U}_{k'}^*$ 相对应的路径偏差优化轨迹定义为 $\tilde{X}_{k'}^*$

$$\tilde{X}_{k'}^* = [\tilde{x}_{k'|k'}^*, \tilde{x}_{k'+1|k'}^*, \dots, \tilde{x}_{k'+N|k'}^*], \quad (4.2.20)$$

因此, 优化问题 5 在 k' 时刻的目标函数值 $J_{k'}$ 为

$$J_{k'} = \sum_{i=0}^{N-1} \left(\|\tilde{x}_{k'+i|k'}^*\|_Q^2 + \|\tilde{u}_{k'+i|k'}^*\|_R^2 \right) + E_{\ell}(\tilde{x}_{k'+N|k'}^*). \quad (4.2.21)$$

可行解 $\tilde{U}_{k'}^*$ 使系统终端状态 $\tilde{x}_{k'+N|k'}^* \in \Omega_{\ell}$, 因此终端控制律 $u_{F,\ell} = K_{\ell} \tilde{x}_{k'+N|k'}^*$ 满足输入约束, 因此控制序列

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{k'+1} &= [\tilde{u}_{k'+1|k'+1}, \dots, \tilde{u}_{k'+N-1|k'+1}, \tilde{u}_{k'+N|k'+1}] \\ &= [\tilde{u}_{k'+1|k'}^*, \dots, \tilde{u}_{k'+N-1|k'}^*, K_{\ell} \tilde{x}_{k'+N|k'}^*], \end{aligned} \quad (4.2.22)$$

可作为优化问题 5 在 $k'+1$ 时刻的可行解, 因此优化问题 5 在 k' 时刻的可行性表明优化问题 5 在 $k'+1$ 时刻是可行的, 而优化问题 5 在 k' 时刻的可行性又可通过初始时刻的可行性得以保证, 因此定理 5 中的结论 (1) 成立。

(2) 收敛性

由于没有模型失配和外部干扰的影响, 在 $k'+1$ 时刻同 $\tilde{U}_{k'+1}$ 对应的状态序列应为

$$\begin{aligned} \tilde{X}_{k'+1} &= [\tilde{x}_{k'+1|k'+1}, \dots, \tilde{x}_{k'+N|k'+1}, \tilde{x}_{k'+N+1|k'+1}] \\ &= [\tilde{x}_{k'+1|k'}^*, \dots, \tilde{x}_{k'+N|k'}^*, \tilde{x}_{k'+N+1|k'+1}], \end{aligned} \quad (4.2.23)$$

根据式 (4.2.22) 和式 (4.2.23), 系统在时刻的目标函数值 $J_{k'+1}$ 为

$$J_{k'+1} = \sum_{i=0}^{N-1} \left(\|\tilde{x}_{k'+1+i|k'+1}^*\|_Q^2 + \|\tilde{u}_{k'+1+i|k'+1}^*\|_R^2 \right) + E_{\ell+1}(\tilde{x}_{k'+1+N|k'+1}) \quad (4.2.24)$$

因此

$$\begin{aligned} J_{k'+1} - J_{k'} &= - \left\| \tilde{x}_{k'|k'}^* \right\|_Q^2 - \left\| \tilde{u}_{k'|k'}^* \right\|_R^2 + \tilde{x}_{k'+1+N|k'+1}^T P_{\ell+1} \tilde{x}_{k'+1+N|k'+1} \\ &\quad + \tilde{x}_{k'+N|k'+1}^T (Q + K_{\ell}^T R K_{\ell} - P_{\ell}) \tilde{x}_{k'+N|k'+1} \end{aligned} \quad (4.2.25)$$

由式 (4.2.15) 可知

$$\tilde{x}_{k'+1+N|k'+1}^T P_{\ell+1} \tilde{x}_{k'+1+N|k'+1} + \tilde{x}_{k'+N|k'+1}^T (Q + K_{\ell}^T R K_{\ell} - P_{\ell}) \tilde{x}_{k'+N|k'+1} \leq 0, \quad (4.2.26)$$

定义 $V_{k'}$ 和 $V_{k'+1}$ 分别为系统在 k' 时刻和 $k'+1$ 时刻的最优值函数, 由于 $k'+1$ 时刻的最优解要优于可行解 $\tilde{U}_{k'+1}$, 因此

$$V_{k'+1} - V_{k'} \leq J_{k'+1} - J_{k'} = - \left\| \tilde{x}_{k'|k'}^* \right\|_Q^2 - \left\| \tilde{u}_{k'|k'}^* \right\|_R^2, \quad (4.2.27)$$

对于所有的切换时刻 $k' > 0$ 都是成立的。至此，最优值函数 V_k 在切换时刻是不增的，结合定理 1 证明过程，系统在每段期望路径内运行时，相邻时刻的最优值函数是单调递减的，所以定理 5 中的结论 (2) 成立。□

同优化问题 2 一样，分段终端约束集的优化目标是使椭球体 $\Omega_\ell, \ell = 1, 2, \dots, d$ 的容量尽可能地大。分段终端预测控制在切换时刻的可行性决定优化问题 5 在未来时刻是否是可行的，因此本文考虑最大化初始切换时刻的终端域 Ω_1 的容量对一系列时变椭球体进行优化，其数学描述归纳为优化问题 6。综上，分段终端预测控制的具体执行流程如表 4.2，其中 T_{final} 为系统仿真时间。

优化问题 6 (分段终端约束集的优化)

$$\begin{aligned} & \underset{\alpha, X_1, \dots, X_d, Y_1, \dots, Y_d}{\text{minimize}} && -\det(X_1)^{\frac{1}{m}} && (4.2.28) \\ \text{s.t.} & \alpha > 0, X_1 > 0, && (4.2.9), (4.2.10), (4.2.11), (4.2.12) \end{aligned}$$

表 4.2 分段终端预测控制算法流程

优化算法 5	基于分段终端不等式约束的 NMPC 方案
1:	通过优化问题 6，离线计算标量 α 和每段曲率对应下的终端惩罚矩阵 P_ℓ
2:	初始化 $k = 0$ ，预瞄系统状态 x_k
3:	while $k < T_{final}$
4:	判断当前参考点曲率 $c(\theta_k)$ 的所属范围，查表寻找当前时刻的 P_ℓ
5:	基于 (4.2.7) 求解优化问题 5，获得可行解（次优解） $u_{k+i k}, v_{k+i k}, \theta_{k+i k}$
6:	$u_k = u_{k k}$ 作用于系统，更新系统动态
7:	更新道路参数 θ_{k+1} ，测量系统状态 x_{k+1}
8:	$k \leftarrow k + 1$
9:	end while

4.2.2 仿真实验验证

根据式 (4.2.29) 定义的期望路径 (如图 4.9) 阐述分段终端预测控制算法:

$$x_R = 1.8 \sin \theta_k, \quad y_R = \begin{cases} 1.2 \sin(2\theta_k), & 0 \leq \theta \leq \theta_{l1} \\ 1.2, & \theta_{l1} < \theta \leq \theta_{l2} \\ 1.8 \cos \theta_k, & \theta > \theta_{l2} \end{cases} \quad (4.2.29)$$

根据路径的曲率将该期望路径分为三段，每段的终端要素通过求取优化问题 6 确定如下：

$$c_1 \in [-1.2, -0.8], \alpha = 24.17, P_1 = \begin{bmatrix} 15.2546 & 0 & 0 \\ 0 & 19.3055 & 7.8744 \\ 0 & 7.8744 & 14.3070 \end{bmatrix} \quad (4.2.30)$$

$$c_2 \in [-0.8, 0], \alpha = 24.17, P_2 = \begin{bmatrix} 11.9195 & 0 & 0 \\ 0 & 18.7946 & 8.2173 \\ 0 & 8.2173 & 10.0374 \end{bmatrix} \quad (4.2.31)$$

$$c_3 \in [0, 0.6], \alpha = 24.17, P_3 = \begin{bmatrix} 19.7111 & 0 & 0 \\ 0 & 22.5037 & 8.8281 \\ 0 & 8.8281 & 13.3277 \end{bmatrix} \quad (4.2.32)$$

为了保证优化问题在线切换终端惩罚函数和终端约束集时依旧具备可行性，依据分段的曲率取值范围求解优化问题 6 时，应保证每段曲率区间的左端点包含于上一段曲率区间范围内，每段曲率区间的右端点包含于下一段曲率区间范围内，如图 4.8 (a) 所示。或者如式 (4.2.30) ~ 式 (4.2.32) 所示，曲率分段点选作分段区间的左右端点，并且曲率区间选为闭区间，如图 4.8 (b) 所示。当曲率 $c \in [-1.2, 0.6]$ ，固定终端域的终端要素如下：

$$\alpha = 25, P = \begin{bmatrix} 28.3645 & 0 & 0 \\ 0 & 30.0251 & 8.8992 \\ 0 & 8.8992 & 47.0440 \end{bmatrix} \quad (4.2.33)$$

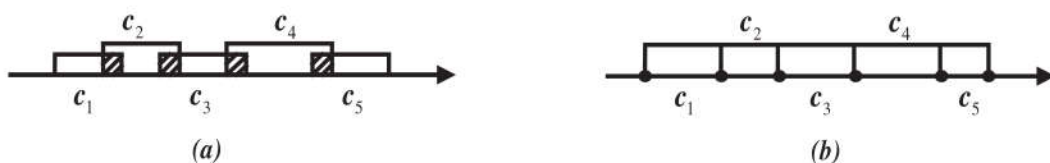


图 4.8 曲率分段示意图

在如式 (4.2.29) 的期望路径下测试，分别将基于式 (4.2.30) ~ (4.2.32) 的分段终端预测控制和基于式 (4.2.33) 的固定终端预测控制，应用于轮式移动机器人的路径跟踪中。其他仿真工况和第 3.4 节相同，仿真结果如图 4.9 ~ 图 4.11 所示。

在图 4.9 中，实线表示参考路径，点虚线表示固定终端预测控制的系统轨迹，虚线表示分段终端预测控制的系统轨迹。图 4.10 和图 4.11 中的实线是固定终端预测控制的

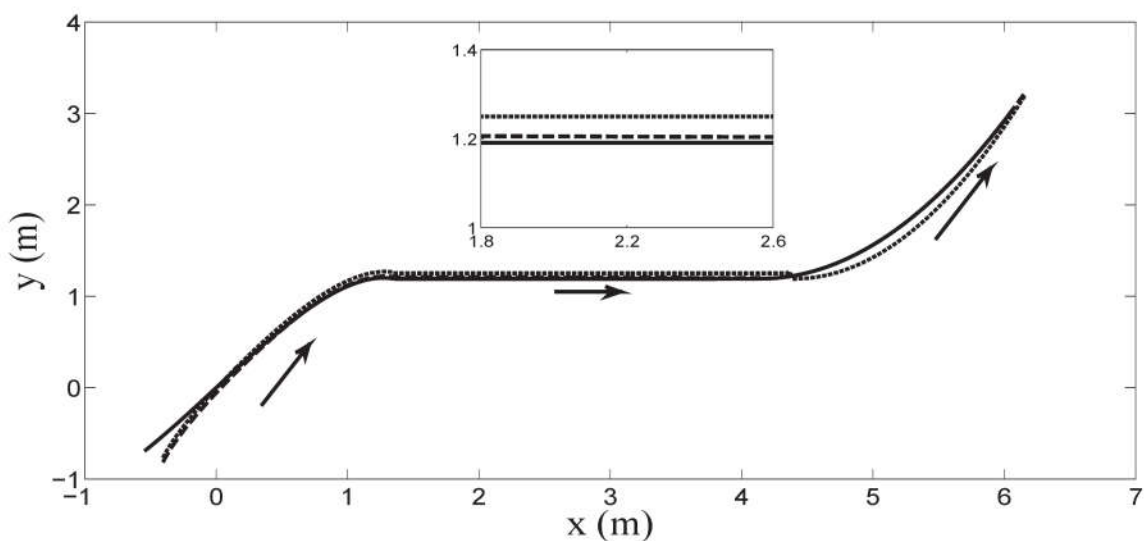


图 4.9 基于分段终端和固定终端的预测控制下的系统轨迹

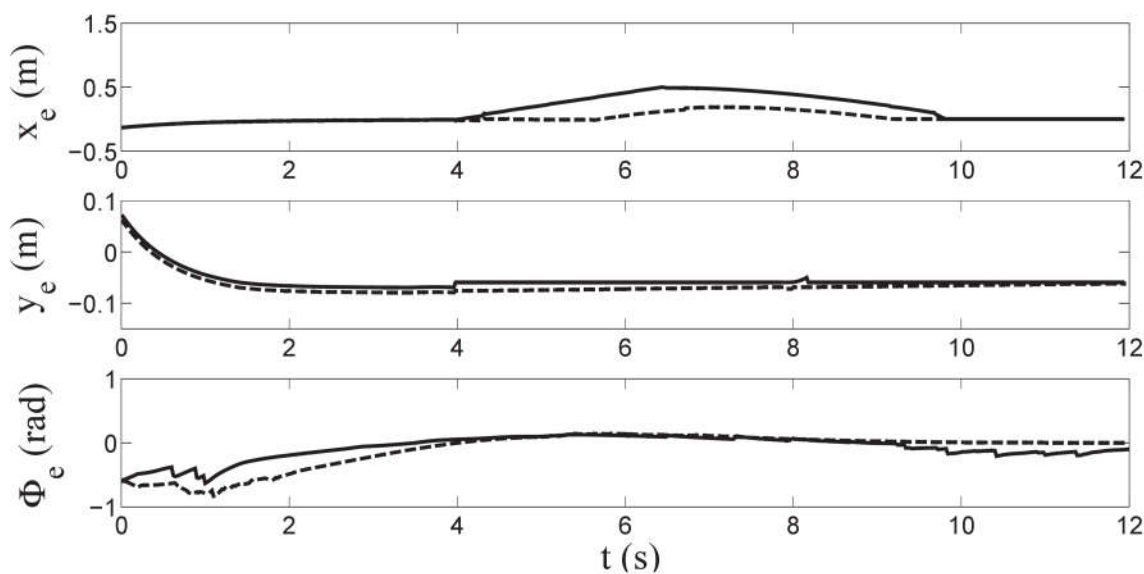


图 4.10 基于分段终端和固定终端的预测控制下的系统偏差

仿真曲线，虚线表示分段终端预测控制的仿真曲线。通过以上的仿真结果可以得出结论，基于分段终端的 NMPC 方案同样可以在容许控制作用下，使移动机器人跟踪期望几何路径。结合系统动态和计算时间（见表 4.3），同固定终端预测控制相比，由于分段终端预测控制可以根据时变的期望路径切换终端要素，减小了固定终端域的保守性，因而具有更好的跟踪精度和可接受的计算时间。在仿真中，为了使分段终端预测控制获得更好的跟踪精度，在优化问题的求解过程中增加了迭代次数，因此使分段终端预

表 4.3 CPU 计算时间

	固定终端	分段终端
总计算时间	640.86 s	661.49 s

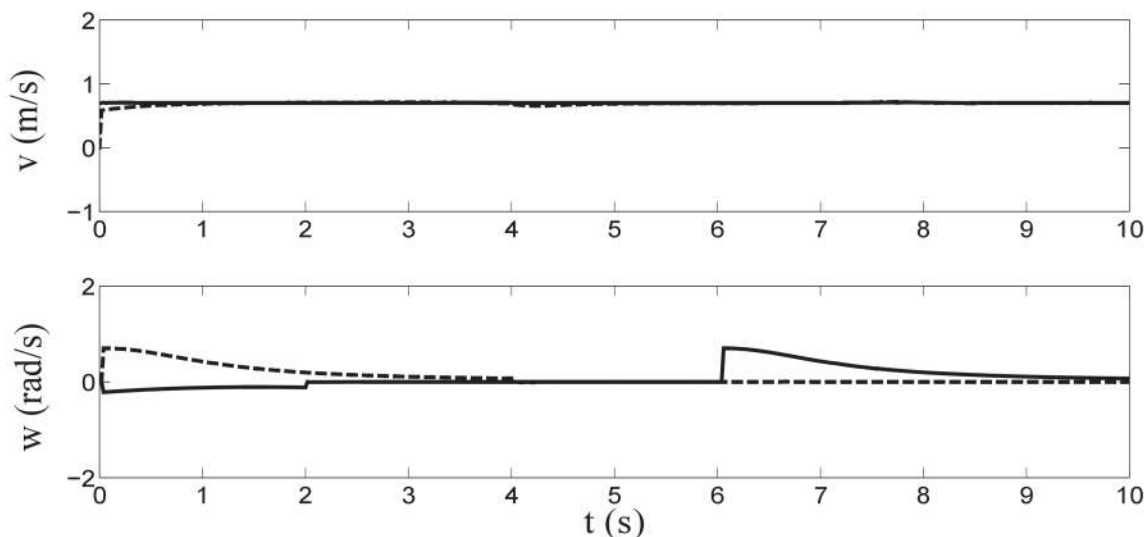


图 4.11 基于分段终端和固定终端的预测控制下的控制输入

测控制的计算时间略大于固定终端预测控制的计算时间。可见，分段终端可以兼顾路径跟踪问题的时变特性和在线计算负担。

下面拟将基于分段终端不等式约束的 NMPC 方案应用于跟踪“8”字路径仿真实验中，由式 (3.4.3) 确定的“8”字路径道路曲率如图 4.12 所示。具有时变曲率特性的“8”字路径是一种典型的周期路径，并且图 4.12 表明其曲率是周期变化的，因此适用于分段终端预测控制的思想。为了使基于分段终端不等式约束的 NMPC 方案对移动机器人的路径跟踪控制有更好的控制性能，按曲率变化大小对“8”字路径进行分段，求解优化问题 6 确定分段终端如下：

$$c_1 \in [-3.28, -2.5], \alpha = 25.24, P_1 = \begin{bmatrix} 24.7963 & 0 & 0 \\ 0 & 26.9474 & 7.6073 \\ 0 & 7.6073 & 21.8607 \end{bmatrix} \quad (4.2.34)$$

$$c_2 \in [-2.5, -0.5], \alpha = 25.24, P_2 = \begin{bmatrix} 17.1952 & 0 & 0 \\ 0 & 19.8228 & 7.5937 \\ 0 & 7.5937 & 12.3201 \end{bmatrix} \quad (4.2.35)$$

$$c_3 \in [-0.5, 0.2], \alpha = 25.24, P_3 = \begin{bmatrix} 11.9634 & 0 & 0 \\ 0 & 19.3365 & 9.0809 \\ 0 & 9.0809 & 11.8310 \end{bmatrix} \quad (4.2.36)$$

$$c_4 \in [0.2, 2.5], \alpha = 25.24, P_4 = \begin{bmatrix} 21.5284 & 0 & 0 \\ 0 & 21.1405 & 8.7118 \\ 0 & 8.7118 & 13.5377 \end{bmatrix} \quad (4.2.37)$$

$$c_5 \in [2.5, 3.28], \alpha = 25.24, P_5 = P_1 = \begin{bmatrix} 24.7963 & 0 & 0 \\ 0 & 26.9474 & 7.6073 \\ 0 & 7.6073 & 21.8607 \end{bmatrix} \quad (4.2.38)$$

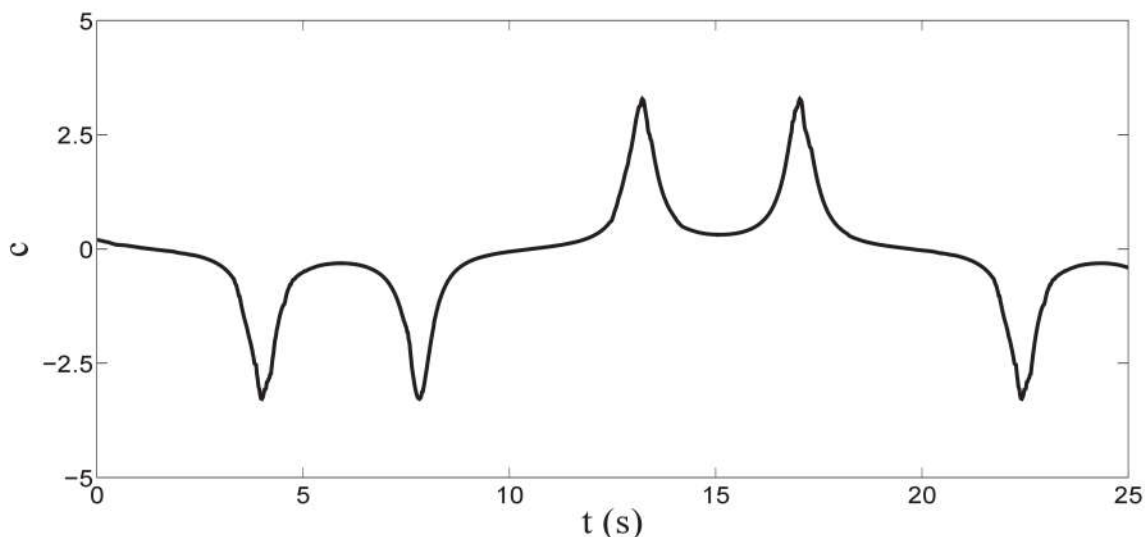


图 4.12 8 字路径的道路曲率示意图

在如式 (3.4.3) 的“8”字路径下测试，分别将基于式 (4.2.34) ~ (4.2.38) 的分段终端预测控制和基于式 (3.4.1) 的固定终端预测控制，应用于轮式移动机器人的路径跟踪控制中。其他仿真工况与 3.4 节相同，仿真结果如图 4.13 ~ 图 4.15 所示。

表 4.4 CPU 计算时间

	固定终端	分段终端
总计算时间	144.26 s	165.63 s

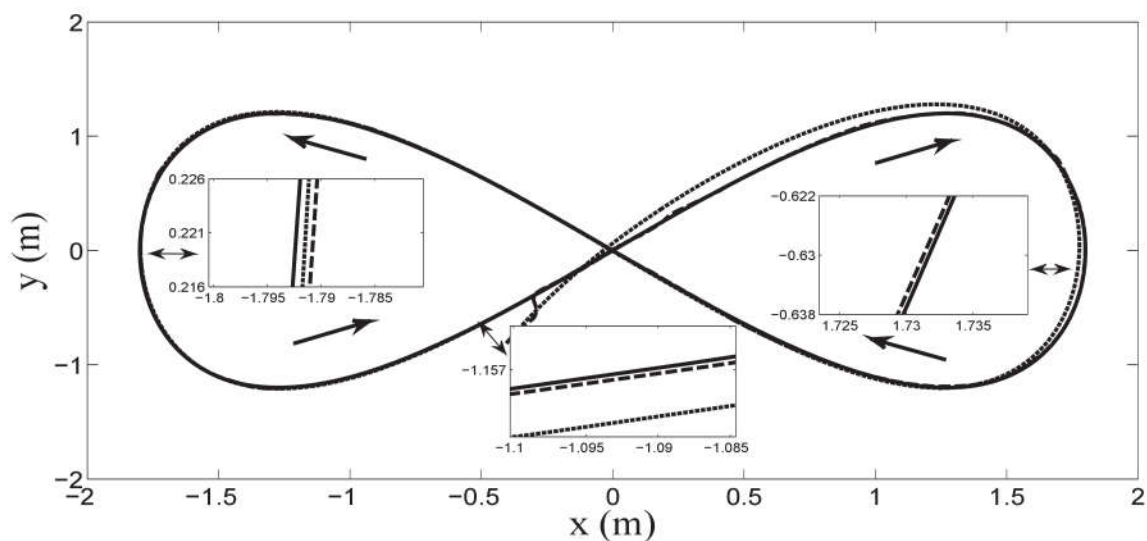


图 4.13 基于分段终端和固定终端的预测控制下的系统轨迹

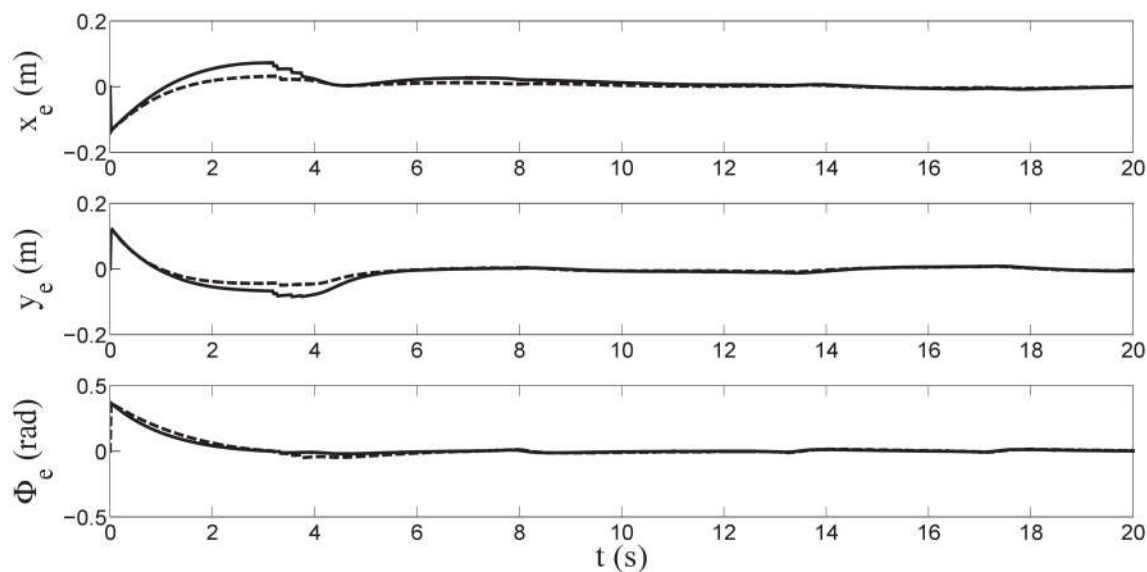


图 4.14 基于分段终端和固定终端的预测控制下的系统偏差

在图 4.13 中，实线表示参考路径，点虚线表示固定终端预测控制的系统轨迹，虚线表示分段终端预测控制的系统轨迹。图 4.14 和图 4.15 中的实线是固定终端预测控制的仿真曲线，虚线表示分段终端预测控制的仿真曲线。结合以上的仿真结果和计算时间（见表 4.4），基于分段终端的 NMPC 方案在容许控制作用下，能够使移动机器人更精确地跟踪“8”字路径，并且计算时间同固定终端预测控制相似。综上，分段终端预测控制不仅考虑了路径跟踪问题的时变特性，并且可以根据路径信息在线切换终端要

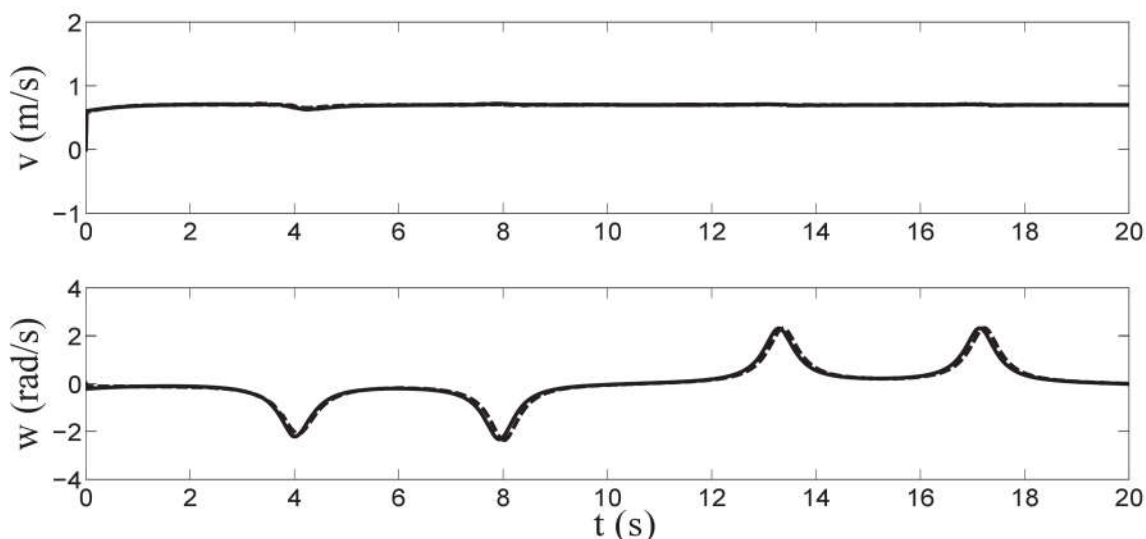


图 4.15 基于分段终端和固定终端的预测控制下的控制输入

素，以获得更好的控制性能。

从第三章可知，基于终端等式约束的 NMPC 方案计算负担重，无法应用于实际系统，基于终端不等式约束的 NMPC 方案虽然具有可接受的计算时间，但又只能解决光滑路径。基于分段终端不等式约束的 NMPC 方案只要求期望路径分段光滑，其分段思想更加适用于实际的控制问题。因此，分段终端预测控制不仅具备了零终端预测控制(更好地跟踪精度)和非零终端预测控制(可接受的计算时间)的优点，并且基于 LMI 和恰当的分段策略很容易获得保证 NMPC 可行性和收敛性的终端要素。

4.3 本章小结

由于路径跟踪问题中的期望路径是时变的，固定形式的终端域对优化问题的在线求解而言具有保守性。因此，本章将时变终端预测控制应用于机器人的路径跟踪问题中，完成了整体方案的设计并通过仿真实验验证了其有效性。考虑到计算机在线求解 NMPC 控制器的能力，本章又在前文的基础上提出了分段终端的思想，并对其控制下的闭环系统性能进行了理论分析。仿真表明，分段终端预测控制不失为兼顾固定终端的计算时间和问题时变特性的有效方案。

第5章 全文总结及展望

5.1 工作总结

轮式移动机器人是非线性约束系统的典型代表，本文将其选择为运动控制对象，研究了移动机器人的路径跟踪控制问题。本文将 NMPC 方案应用于轮式移动机器人的运动控制，实现了机器人对期望路径的跟踪控制。本文中路径跟踪控制系统的设计由问题描述、建立被控对象数学模型、设计 NMPC 控制器、系统性能分析和仿真验证五个部分组成。具体完成的工作总结如下：

1. 本文首先对路径跟踪问题的理论背景、工程意义和研究现状三个方面进行了详细的梳理和总结，并对比和区别了轨迹跟踪问题和路径跟踪问题。在基于非线性离散系统对路径跟踪问题进行描述后，推导并建立了轮式移动机器人的运动学模型，确立了路径跟踪的控制任务。本文的运动控制对象在本质上属于非线性、多输入多输出，同时具有状态和输入约束的系统。

2. 针对具有非线性动态和约束条件的控制任务，本文提出了基于终端不等式约束的 NMPC 方案，给出了开环优化问题具体的数学形式和求解步骤，并且基于值函数递减的分析方法对优化问题的可行性和系统的性能进行了理论分析。此分析过程不仅系统化了 NMPC 的运行机理，并且引入了附加的终端惩罚函数和终端约束集。随后，本文基于非线性多面体描述和线性矩阵不等式确定了终端要素的计算方法。由于为保证 NMPC 方案可行性和收敛性需要引入额外的终端域优化方法，而在控制器设计中很容易得到系统状态的预测信息，可以利用期望路径作为系统的终端域，因此本文又介绍了基于终端等式约束的 NMPC 方案，并通过仿真实验对比分析了两种 NMPC 方案在系统动态和计算负担方面的不同特点。

3. 非零终端预测控制方案不能解决非光滑路径的跟踪问题，而零终端预测控制方案的计算负担重、在线求解时间长，在现行的硬件结构下，无法应用于实际系统。另外，非零终端预测控制和零终端预测控制的终端域都是固定形式的，在整个 NMPC 优化问题在线求解的过程中始终保持不变，这对于求解时变的路径跟踪问题而言具有保守性。因此，本文在时变终端预测控制的基础上，提出了分段终端预测控制以解决上述问题，并对其控制下的闭环系统性能进行了理论分析，最后通过仿真实验说明了该控制方案的有效性。

5.2 研究展望

本文对 NMPC 控制器设计和终端域优化方法给出了比较详细地讨论，并且为了探究采用不同终端域形式的控制方案的性能，逐一进行了离线仿真实验加以验证。但是控制器设计的过程中至少存在以下几个问题需要解决：

1. 本文在建模和控制器设计过程中都假设不存在模型失配和外界干扰的影响，这种理想情况并不能反映绝大多数的实际情况，例如在轮式移动机器人的运动过程中会受到路面不平度等环境影响，控制系统对干扰的抑制性能有待完善；

2. 本文设计的 NMPC 还不能较好地满足实物控制的实时性，因此整体闭环控制系统的物理实现困难。本文采用 MATLAB 自带的优化求解器计算非线性开环优化问题，求解过程相对耗时，应该用高效的优化算法提高 NMPC 的在线求解速度，这是对闭环系统进行硬件实现的前提；

3. 本文初步解决了路径跟踪控制问题，使被控对象 (移动机器人) 能够到达并跟随期望几何路径。下一步工作应在跟踪任务中加入速度要求，以满足系统对跟踪时间的期望。

参考文献

- [1] FAULWASSER T. Optimization-Based Solutions to Constrained Trajectory-Tracking and Path-Following Problems[M]. Shaker Verlag: Otto-von-Guericke Universität Magdeburg, 2013.
- [2] RAWLINGS J B, MAYNE D Q. Model Predictive Control:Theory and Design[M]. Madison Wisconsin: Nob Hill Publishing, 2009.
- [3] GRÜNE L, PANNEK J. Nonlinear Model Predictive Control:Theory and Algorithms[M]. Springer Verlag: Communication and Control Engineering, 2011.
- [4] GRIZZLE J W, ABBA G, PLESTAN F. Asymptotically Stable Walking for Biped Robots: Analysis via Systems with Impulse Effects[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2001, 46(5):51–64.
- [5] AGUIAR A P, DAČIĆ D B, HESPAHNA J P, et al. Path Following or Reference Tracking? An Answer Relaxing the Limits to Performance[C]//Proc. of the 5th IFAC/EURON Symposium on Intelligent Autonomous Vehicles. Lisbon, Portugal: IEEE, July 2004.
- [6] AGUIAR A P, HESPAHNA J P, KOKOTOVIĆ P V. Path-following for Nonminimum Phase Systems Removes Performance Limitations[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2005, 50(2):234–239.
- [7] AGUIAR A P, HESPAHNA J P, KOKOTOVIĆ P V. Performance Limitations in Reference Tracking and Path Following for Nonlinear Systems[J]. Automatica, 2008, 44(3):598–610.
- [8] DAČIĆ D B, NEŠIĆ D, KOKOTOVIĆ P V. Path-following for Nonminimum Phase Systems Removes Performance Limitations[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2007, 52(3):481–487.
- [9] AL-HIDDABI S A, SHEN J, MCCLAMROCH N H. Tracking and Maneuver Regulation Control for Nonlinear Non-minimum Phase Systems[C]//Proc. of the 19th American Control Conference. Chicago: IEEE, June 2000:492–496.

- [10] 路甬祥, 周济. 《中国制造 2025》重点领域技术路线图[R]. 北京: 国家制造强国建设战略咨询委员会, 2015.
- [11] WANG H, GUO R, ZHANG H, et al. A Tool Path Error Estimate in Computer Numerical Control for Five-axis Machining[C]//Proc. of the 9th International Conference on Natural Computation. Shenyang, China: IEEE, July 2013:1639–1643.
- [12] LOW C, WANG D. GPS-based Path Following Control for a Car-like Wheeled Mobile Robot with Skidding and Slipping[J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2008, 16(2):340–347.
- [13] YANG F, WANG C. Adaptive Tracking Control for Uncertain Dynamic Nonholonomic Mobile Robots Based on Visual Servoing[J]. Control Theory and Applications, 2012, 10(1):56–63.
- [14] AL-HIDDABI S A, McCLAMROCH N H. Tracking and Maneuver Regulation Control for Nonlinear Non-minimum Phase Systems: Application to Flight Control[J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2002, 10(6):780–792.
- [15] WU J, SHI X U. Nonlinear Attitude Tracking Control of a Spacecraft with Thrusters Based on Error Quaternions[J]. Chinese Journal of Aeronautics, 2002, 15(3):129–138.
- [16] YANG Y, DU J, CHEN G, et al. Trajectory Tracking Control of Nonlinear Full Actuated Ship With Disturbances[C]//2011 International Conference of Soft Computing and Pattern Recognition (SoCPaR). Dalian,China: IEEE, 2011:318–323.
- [17] MCDOWELL P, CHEN J, BOURGEOIS B. UUV Teams, Control from a Biological Perspective[J]. IEEE Oceans Conf. Rec., 2002, 1:331–337.
- [18] BARBARESSO J, CORDAHI G, GARCIA D, et al. Intelligent Transportation Systems (ITS) 2015 - 2019 STRATEGIC PLAN[R]. Washington,DC: US Department of Transportation, 2014.
- [19] 刘蕊. 智能车路径跟踪及其底层控制方法研究[D]. 北京: 北京工业大学硕士学位论文, 2013.
- [20] MING F H, OZGUNER U. A Path Following Control Algorithm for Urban Driving[C]//IEEE International Conference on Vehicular Electronics and Safety. Netherlands: IEEE, 2008:227–231.

-
- [21] RACHAH A, NOLL D. Modeling and Control of a Semi-batch Cooling Seeded Crystallizer[C]//Proceedings of 6th International Conference on Modeling, Simulation and Applied Optimization. Istanbul: IEEE, 2015:1–6.
- [22] 唐述博. 非完整移动机器人点镇定和轨迹跟踪控制研究[D]. 大连: 大连理工大学硕士学位论文, 2005.
- [23] 祝晓才. 轮式移动机器人的运动控制[D]. 武汉: 国防科学技术大学博士学位论文, 2006.
- [24] SLOTINE J J E, S Y H. Improving the Efficiency of Time-optimal Path-following Algorithms[J]. IEEE Transactions on Robotics and Automation, 1989, 5(1):118–124.
- [25] DAHL O, NIELSEN L. Torque-limited Path Following by Online Trajectory Time Scaling[J]. IEEE Transactions on Robotics and Automation, 1990, 6(5):554–561.
- [26] VERSCHEURE D, DEMEULENAERE B, SWEVERS J, et al. Time Optimal Path Tracking for Robots: A Convex Optimization Approach[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2009, 54(10):2318–2327.
- [27] HLADIO A, NIELSON C, WANG D. Path Following Controller Design for a Class of Mechanical Systems[C]//Proceedings of 18th World Congress of the International Federation of Automatic Control (IFAC). Milano, Italy: IEEE, 2011:10331–10336.
- [28] NIELSEN C, FULFORD C, MAGGIORE M. Path Following Using Transverse Feedback Linearization: Application to a Maglev Positioning System[J]. Automatica, 2010, 46(3):585–590.
- [29] ALTAFINI C. Following a Path of Varying Curvature as an Output Regulation Problem[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2002, 47(9):1551–1556.
- [30] PETTERSEN K Y, E L. Way-point Tracking Control of Ships[C]//Proceedings of 40th IEEE Conference on Decision and Control. Orlando, Florida USA: IEEE, 2001:940–945.
- [31] LIU Y, GUO C, SHEN Z, et al. Stable Adaptive Neural Network Control of Path Following for Underactuated Ships[J]. Control Theory and Applications, 2010, 27:169–174.

- [32] 刘扬, 刘美杰. 基于领导跟随的欠驱动船舶编队跟踪控制[J]. 控制工程, 2013, 20(5):980–983.
- [33] ENCARNACAO P, PASCOAL A. Combined Trajectory Tracking and Path Following: An Application to the Coordinated Control of Autonomous Marine Craft[C]//Proceedings of 40th IEEE Conference on Decision and Control. Orlando, Florida USA: IEEE, 2001:964–969.
- [34] SKJETNE R, FOSSEN T I. Nonlinear Maneuvering and Control of Ships[C]//OCEANS, MTS/IEEE Conference and Exhibition. USA: IEEE, 2001:1808–1815.
- [35] 于浩. 非完整轮式移动机器人运动规划与控制研究[D]. 山东青岛: 中国海洋大学博士学位论文, 2014.
- [36] SKJETNE R, FOSSEN T I, KOKOTOVIĆ P V. Adaptive Maneuvering, with Experiments, for a Model Ship in a Marine Control Laboratory[J]. Automatica, 2005, 41(2):289–298.
- [37] 罗伟林, 邹早建, 李铁山. 基于神经网络和 \mathcal{L}_2 增益的船舶航向自动舵设计[J]. 中国造船, 2009, 50(2):40–45.
- [38] DONG W, WEI H, TSO S K, et al. Tracking Control of Uncertain Dynamics Nonholonomic System and its Application to Wheeled Mobile Robots[J]. IEEE Trans on Robotics and Automation, 2000, 6:870–874.
- [39] 孙棣华, 崔明月, 李永福. 具有参数不确定性的轮式移动机器人自适应 backstepping 控制[J]. 控制理论与应用, 2012, 29(9):1198–1204.
- [40] 崔明月, 孙棣华, 李永福. 轮子纵向打滑条件下的移动机器人自适应跟踪控制[J]. 控制与决策, 2013, 28(5):664–670.
- [41] 王虎. 基于滚动优化的轮式移动机器人轨迹跟踪控制[D]. 吉林长春: 吉林大学硕士学位论文, 2007.
- [42] CHWA D, SEO J H, KIM P, et al. Sliding Mode Tracking Control of Nonholonomic Wheeled Mobile Robots[C]//Proceedings of the 21th American Control Conference. Anchorage, Alaska United States: IEEE, 2002:3991–3996.

-
- [43] CHAO H, HU Y, WU X. Applications of High-Order Sliding Mode Control to Robust Output Tracking of Nonholonomic Mobile Robots[J]. *Control and Decision*, 2002, 19(2):253–257.
- [44] 杨震, 王岩, 刘繁明. 欠驱动船舶路径跟踪的神经滑模控制[J]. *中国造船*, 2015, 56(2):45–55.
- [45] 袁长清, 李俊峰, 王天舒. 航天器编队飞行多目标姿态快速跟踪鲁棒控制[J]. *应用数学和力学*, 2008, 29(2):169–180.
- [46] 贾鹤鸣, 王嘉鹏, 郭婧. 基于自适应滑模的智能小车路径跟踪控制[J]. *中南大学学报(自然科学版)*, 2011, 42:432–435.
- [47] AGUIAR A P, HESPANHA J. Trajectory-tracking and Path-following of Underactuated Autonomous vehicles with Parametric Modeling Uncertainty[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, 52(8):1362–1379.
- [48] GHABCHELOO R, PASCOAL A, SILVESTRE C, et al. Nonlinear Coordinated Path Following Control of Multiple Wheeled Robots with Bidirection Communication Constraints[C]//*Proceedings of the 12th International Conference on Advanced Robotics*. Seattle, WA: IEEE, 2002:657–664.
- [49] ALESSANDRETTI A, AGUIAR A P, JONES C N. Trajectory Tracking and Path Following Controllers for Constrained Underactuated Vehicles using Model Predictive Control[C]//*Proceedings of 2013 European Control Conference (ECC)*. Zürich, Switzerland: IEEE, 2013:1371–1376.
- [50] MARAFIOTI G, LILJEBÄCK P, TRANSETH A A. A Study of Nonlinear Model Predictive Control for Snake Robot Path Following[C]//*Proceedings of the 2014 IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics*. Bali, Indonesia: IEEE, 2014:568–573.
- [51] FAULWASSER T, KERN B, FINDEISEN R. Model Predictive Path-Following for Constrained Nonlinear Systems[C]//*Proceedings of 48th IEEE Conference on Decision and Control held jointly with the 28th Chinese Control Conference*. Shanghai, China: IEEE, 2009:8642–8647.

- [52] YU S, LI X, CHEN H, et al. Nonlinear Model Predictive Control for Path Following Problem[J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2013, 25(8):1168–1182.
- [53] FAULWASSER T, FINDEISEN R. Predictive Path Following without Terminal Constraints[C]//*Proceedings of 20th Int. Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems (MTNS)*. Melbourne, Australia: IEEE, 2012.
- [54] FAULWASSER T, MATSCHEK J, ZOMETA P, et al. Predictive Path-following Control: Concept and Implementation for an Industrial Robot[C]//*Proceedings of 2013 IEEE International Conference on Control Applications*. Hyderabad, India: IEEE, 2013:128–132.
- [55] HOUSKA B, FERREAU H J, DIEHL M. An Auto-Generated Real-Time Iteration Algorithm for Nonlinear MPC in the Microsecond Range[J]. *Automatica*, 2011, 47(10):2279–2285.
- [56] FAULWASSER T, FINDEISEN R. Nonlinear Model Predictive Control for Constrained Output Path Following[J], DOI 10.1109/TAC.2015.2466911. Submitted to *IEEE Transactions on Automatic Control*.
- [57] LAM D, MANZIE C, GOOD M C. Model Predictive Contouring Control for Biaxial Systems[J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2013, 21(2):552–559.
- [58] BÖCK M, KUGI A. Real-time Nonlinear Model Predictive Path-Following Control of a Laboratory Tower Crane[J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2014, 22(4):1461–1473.
- [59] 段广仁. 线性系统理论[M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 1996.
- [60] 王鸿鹏. 复杂环境下轮式自主移动机器人定位与运动控制研究[D]. 天津: 南开大学博士学位论文, 2009.
- [61] 谢文静, 马保离. 不确定轮式移动机器人的自适应集合镇定[C]//*第二十九届中国控制会议论文集*. 中国北京: IEEE, 2010:524–528.
- [62] 程英英. 基于微分平坦的轮式移动机器人轨迹规划[D]. 吉林长春: 吉林大学硕士学位论文, 2008.

-
- [63] 马海涛. 非完整轮式移动机器人的运动控制[D]. 安徽合肥: 中国科学技术大学博士学位论文, 2009.
- [64] YU S, HOU C, QU T. A Revisit to MPC of Discrete-time Nonlinear Systems[C]//Proceedings of the 5th Annual IEEE International Conference on Cyber Technology in Automation, Control and Intelligent Systems. Shenyang, China: IEEE, 2015:7-12.
- [65] 俞立. 鲁棒控制—线性矩阵不等式处理方法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2002.
- [66] 于树友, 陈虹, 张鹏. 一种基于 LMI 的非线性模型预测控制终端域优化方法[J]. 自动化学报, 2008, 34(7):798-804.
- [67] BOYD S, GHAOUI L E, FERON E, et al. Linear Matrix Inequalities In System And Control Theory[M]. Philadelphia: Society for Industrial Mathematics, 1994.
- [68] E N Y, S N A. Interior Point Polynomial Methods in Convex Programming: Theory and Applications[M]. Philadelphia: Society for Industrial Mathematics, 1994.
- [69] LIU Y, YU S, GAO B, et al. Receding Horizon Following Control of Wheeled Mobile Robots: A Case Study[C]//Proceedings of the 12th IEEE International Conference on Mechatronics and Automation. Beijing, China: IEEE, 2015:2571-2576.

作者简介及研究成果

作者简介:

作者: 刘洋, 女, 1991年4月生于吉林省榆树市, 汉族。2013年7月获得吉林大学自动化专业工学学士学位。同年, 保送至吉林大学通信工程学院控制理论与控制工程专业攻读硕士学位, 主要研究方向为路径跟踪及模型预测控制。

攻读硕士学位期间参加的科研项目:

1. 973课题“跨尺度微重力补偿实现的基座控制”(No. 2012CB821202);
2. 国家自然科学基金重点项目“面向安全性的电动化汽车能效滚动优化”(No.61520106008);
3. 国家自然科学基金面上项目“模型预测控制的内在鲁棒性研究”(No.61573165)。

攻读硕士学位期间发表的论文:

1. 刘洋, 于树友, 顾雪来, 陈虹. 基于模糊自整定PID的高速公路爆胎车辆轨迹控制. 吉林大学学报(信息科学版)(核心期刊), 2015, 33(4):380-388.
2. Yang Liu, Shuyou Yu, Bingzhao Gao and Hong Chen. Receding Horizon Following Control of Wheeled Mobile Robots: A Case Study. The 12th IEEE International Conference on Mechatronics and Automation, pp. 2571-2576, 2015. (EI检索: 20160501860452).
3. Shuyou Yu, Peng Qu and Yang Liu. Robust control invariant set of linear systems with disturbances. The 26th International Conference on Mechatronics and Control, Jinzhou, China, 2014.
4. 于树友, 刘洋, 王菲, 陈虹, 郭洪艳. 爆胎车辆轨迹控制的仿真研究. 北京工业大学学报(已录用).
5. Yang Liu, Shuyou Yu, Bingzhao Gao and Hong Chen. Receding Horizon Control for Path Following Problems of Wheeled Mobile Robots. Submitted to Control Theory and Technology.

致谢

硕士毕业论文的撰写工作已经接近尾声，这也意味着三年的求学生活即将落下帷幕。掩卷深思，不禁感慨万千。这充实而短暂的硕士生涯，承载着我过去沉甸甸的回忆，是我人生历程中一段难忘的时光。三年来，在实验室众多恩师益友的关爱和帮助下，我得以不断成长和自我突破，这其中有辛劳和奋斗，有泪水与欢笑，有鼓励和安慰。一路走来，我受益匪浅，并且这份宝贵的人生财富足以伴我一生的旅程。

首先诚挚感谢陈虹教授在我攻读硕士期间给予的精心指导和关怀鼓舞。正值我本科毕业迷茫之时，是陈老师给了我加入陈虹课题组继续深造的机会。在与此一流的科研团队共同成长的过程中，陈老师在学术造诣上的远见卓识、精益求精的科研态度、循循善诱的崇高师德、独树一帜的大家风范深深地感染和激励着我，是我以后在科研工作和日常生活中的学习楷模！感谢指导教师于树友副教授，感谢您花费了大量的时间和精力阅读我的论文，并提出了宝贵的修改意见。在相处的三年时光中，于老师会对我的学习计划提出建设性建议，并对我的不足提出善意的改进意见。研究生阶段不仅开阔了我的眼界，明晰了我的内心，更重要的是提升了个人的综合素质，这所有的一切都得益于良好的实验室环境和二位恩师的教导帮助，学生心存感激并铭记于心，再次向二位恩师表示真心的感谢并致以崇高的敬意！

除此之外，感谢赵海燕老师，胡云峰老师，高炳钊老师，王萍老师，郭洪艳老师和卢晓晖老师在生活和学习上给予我的关心和帮助，正是他们在本论文开题和中期检查时所提出的宝贵意见解决了我在撰写过程中遇到的问题，并使本文日臻完善。感谢许芳老师，刘奇芳老师，曲婷老师和王菲师姐无私的付出，谢谢你们接受零基础的我，带领我帮助我一步步走入科研工作。同时，感谢同组的杨荣彬，周鑫，李超，梁瑜，房丽爽，范广栋师弟，谭雷师弟，郭洋师妹，王伍洋师妹，感谢有你们三年的陪伴和支持，是你们的乐观与激情为我辛劳的生活添加了绚丽的色彩，你们的情谊让我倍感温暖，我将会份外珍惜！

最后也是最重要的，我要感谢我的父母含辛茹苦地把我养大，是你们倾尽所有给予我无微不至的照顾和关爱，是你们不求回报的付出和从未改变的支持，才能成就今天的我。你们无尽的爱将会一直陪伴着女儿度过未来充满挑战的日日夜夜！