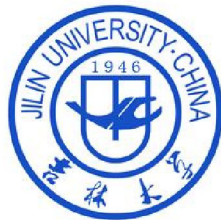


分类号：单位代码：10183

研究生学号：2016524054 密级：公开



吉林大学

硕士学位论文

(专业学位)

馈能悬架控制算法研究

Research on control algorithm of regenerated suspension

作者姓名：刘清宇

专 业：控制工程

研究方向：馈能悬架

指导教师：于树友 教授

培养单位：通信工程学院

2019年6月

馈能悬架控制算法研究

Research on Control Algorithm of Regenerated Suspension

作者姓名：刘清宇

专 业：控制工程

指导教师：于树友 教授

学位类别：工程硕士

答辩日期：2019 年 6 月 1 日

吉林大学硕士学位论文原创性声明

本人郑重声明：所呈交的硕士学位论文，是本人在指导教师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已经注明引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品成果。对本文的研究做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本人完全意识到本声明的法律结果由本人承担。

学位论文作者签名：刘清宇

日期：2019 年 6 月 11 日

关于学位论文使用授权的声明

本人完全了解吉林大学有关保留、使用学位论文的规定，同意吉林大学保留或向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅和借阅；本人授权吉林大学可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或其他复制手段保存论文和汇编本学位论文。

(保密论文在解密后应遵守此规定)

论文级别： 硕士 博士

学科专业：控制理论与控制工程

论文题目：馈能悬架控制算法研究

作者签名：刘清宇

指导教师签名：于和波

2019年6月11日

作者联系地址（邮编）：

作者联系电话：

摘要

乘坐舒适性和能量回收效率是汽车馈能悬架研究中最为核心的两个问题，馈能悬架的研究难点也在于二者之间的协调。针对上述问题，本文采用一种双层控制策略去解决，上层分别采用基于遗传算法的 LQR 控制算法和基于扩展 LMI 的鲁棒控制算法实现主动控制的数据计算，下层采用反步法实现执行机构对上层控制器输出的跟踪。为了更好地协调乘坐舒适性与能量回收的关系，提出三种优化性能方案：(1)仅考虑乘坐舒适性；(2)既考虑乘坐舒适性，也考虑影响能量回收的因素；(3)考虑乘坐舒适性、能量消耗、影响能量回收的因素。由此设计得到的控制器具有易于物理实现，兼顾乘坐舒适性与能量回收的特点，在实际应用中有着十分重要的意义。

在此基础之上，考虑以下两点问题：1.悬架系统中阻尼元件及弹性元件会随着悬架使用时间的增长出现磨损老化，使悬架系统出现参数扰动问题。2.当汽车在使用过程中，由于乘坐人数的变化、车内物品的放置等因素导致汽车簧载质量产生突变的问题。为了解决此类问题，本文采用多胞线性变参数变增益 (LPV) H_∞ / 广义 H_2 输出反馈控制算法来设计控制器以达到主动控制的要求。

通过 Matlab 仿真分析，对比所设计的几种控制器的动力学性能、时域约束、馈能效果，最终验证控制器的有效性。

关键词：

馈能悬架遗传算法 LQR 控制 输出反馈 H_∞ / 广义 H_2 控制 松弛变量 PI 控制
多胞 LPV 系统

Abstract

Ride comfort and energy recovery efficiency are both the most important problems in the research of regenerated suspension. In this paper, two kinds of control algorithms are designed, both of which adopt the double-layer control strategy. The upper layer adopts the LQR control algorithm based on genetic algorithm and the output feedback control algorithm based on extended LMI, while the lower layer adopts the back-stepping method to realize the tracking of the output of the upper layer controller by the actuator. In order to better coordinate the relationship between ride comfort and energy recovery, three performance optimization schemes are proposed in this paper:(1) Only ride comfort is considered; (2) Consider both ride comfort and factors affecting energy recovery; (3) Consider ride comfort, energy consumption and factors affecting energy recovery. The designed controller has the characteristics of easy physical realization, comfort and energy recovery, and is of great significance in practical application.

On this basis, considering the two points below: 1. The damping elements and elastic elements in the suspension system will wear and age with the increase of the service time of the suspension, causing the parameter disturbance problem in the suspension system. 2. When the vehicle is in use, sudden changes occur to the sprung mass of the vehicle due to changes in the number of passengers, the placement of articles in the vehicle and other factors. In order to solve this problem, the multi-cell linear variable parameter variable gain (LPV) H_∞ /generalized H_2 output feedback control algorithm is adopted to design the controller to meet the requirements of active control.

By Matlab simulation analysis, the dynamic performance, time-domain constraint and energy feed effect of the designed controllers are compared, and the effectiveness of the controller is finally verified.

Keywords:

LQR control output feedback H_∞ /generalized H_2 control relaxation variable back-stepping method Multicellular LPV system

目 录

第 1 章绪论.....	1
1.1 研究背景及意义.....	1
1.2 国内外研究现状.....	2
1.2.1 馈能减震器.....	2
1.2.2 主动悬架控制算法.....	5
1.3 主要研究内容.....	7
第 2 章悬架系统模型.....	9
2.1 路面模型建立.....	9
2.1.1 随机路面模型.....	9
2.1.2 确定性坑包路面模型.....	10
2.2 馈能悬架系统模型.....	11
2.2.1 馈能减震器方案.....	11
2.2.2 馈能悬架模型建立.....	11
2.2.3 电机等效电路.....	13
2.3 馈能悬架评价指标.....	13
2.3.1 馈能原理.....	13
2.3.2 馈能效率.....	14
2.4 本章小结.....	15
第 3 章 LMI 理论知识.....	17
3.1 线性矩阵不等式.....	17
3.1.1 标准的 LMI 问题.....	17

3.1.2 相关理论	17
3.2 本章小结	23
第 4 章 馈能悬架名义系统控制算法	25
4.1 控制方案	25
4.1.1 控制问题描述	25
4.1.2 控制结构	26
4.2 基于遗传算法的 LQR 控制器设计	27
4.2.1 遗传算法	27
4.2.2 LQR 控制	28
4.2.3 基于遗传算法的 LQR 控制器设计	28
4.3 状态反馈控制器设计	31
4.3.1 H_∞ /广义 H_2 状态反馈控制	31
4.3.2 基于扩展 LMI 法状态反馈控制	33
4.4 输出反馈控制器设计	34
4.4.1 H_∞ /广义 H_2 输出反馈控制	34
4.4.2 基于扩展 LMI 法输出反馈控制	36
4.5 跟踪控制器设计	38
4.6 仿真分析	40
4.6.1 扩展 LMI 法有效性仿真分析	40
4.6.2 基于遗传算法的 LQR 控制器仿真	43
4.6.3 基于扩展 LMI 控制器仿真	44
4.6.3 馈能效果仿真分析	48
4.7 本章小结	49

第 5 章考虑参数扰动的馈能悬架控制算法.....	51
5.1 参数扰动系统.....	51
5.2 LPV 系统 H_∞ /广义 H_2 输出反馈控制.....	51
5.3 LPV 馈能悬架系统仿真	53
5.4 本章小结.....	55
第 6 章总结与展望.....	57
6.1 全文总结.....	57
6.2 后续工作展望.....	57
参考文献.....	59
作者简介.....	65
致谢.....	67

第 1 章 绪论

1.1 研究背景及意义

悬架是连接车身与车轮之间的传导力的装置的总称，它的功能是缓冲或传递车轮和车身之间的振动，减缓由不平路面引起的振动，以保证汽车的行驶平顺性、操纵稳定性和乘坐舒适性^[1]。

根据减缓振动的动力源不同，汽车的悬架系统可分为三种类型，分别是被动悬架、半主动悬架和主动悬架。被动悬架是指由劲度系数不变的弹性元件或阻尼系数不变的阻尼元件所组成的弹性悬架系统，系统各元件的参数不可改变，只能被动地吸收能量、减缓冲击，难以适应不同的路面和工况，很难兼顾良好的乘坐舒适性和操纵稳定性；半主动悬架是指弹性元件的刚度或阻尼元件的阻尼可调的悬架系统，通过车身各部位的传感器来获知行驶路面的状况和车身的状态，对阻尼元件进行调整，从而保证汽车在行驶时，无论是遇到冲击或是其它干扰，依然能保证一定行驶平顺性和操纵稳定性；主动悬架是指弹性元件不仅可以通过汽车的行驶状态和路面状况进行不断地自我调整，还可以通过作动器产生作动力来主动缓冲振动，使汽车保持在最理想的工作状态。从优化性能而言，主动悬架最佳，但是，由于主动悬架能耗过大，应用并不广泛。

汽车悬架由于其机械结构的不同，按照是否依靠连杆可以分为两种类型：只靠一整根连杆连接的是非独立悬架，否则是独立悬架^[2]。非独立悬架的不同侧的车轮由一根整体车轴连接，车轮和车龙骨都处于车架或汽车整体的下部，当一侧车轮遇到路面激励时，另一侧也会连带着振动。独立悬架机械构造简单、花费少、韧性强、保养起来简单，因此在大型车辆应用较为广泛，但是介于其阻尼元件不可调，动力学性能较差，所以很少在小型车辆中应用。独立悬架的车轴分成两个部分，每只车轮由螺旋式的弹簧独立安装在车身的下部，当一侧车轮受到路面冲击时，由于机械结构分离，另一侧车轮不会受到影响。独立悬架相比于非独立悬架重量轻，自身惯性小，遇到振动时，车身受到的冲击较小；另外，车轮之间单独振动，更有利于降低车身的振动。如图 1.1 所示，即为独立悬架和非独立悬架的示意图。

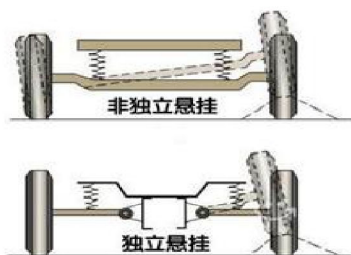


图 1.1 独立悬架和非独立悬架

随着汽车工业技术和人们对车辆性能需求的提高，传统的被动悬架所达到的性能不能满足人们的要求，能够主动改善乘坐舒适性的半主动悬架和主动悬架逐渐成为了众人所需。半主动悬架拥有弹性元件可变和阻尼元件可调的优点，但也仅仅局限于临界阻尼范围内的调节，即在工作过程中虽然不消耗过多能源，却只能实现一般程度的乘坐舒适性优化。而主动悬架就解决了半主动悬架不能解决的问题，能够打破阻尼系数局限的约束，使得汽车能够在半主动悬架无法应对的工况下依然保持良好的乘坐舒适性。按照控制结构分析，主动悬架系统的主要组成部分有三块：执行机构、控制器、传感器。控制器作为核心部分，它所起到的作用是至关重要的。控制器的工作原理是：车载 ECU^[3]负责接收安装在车身各处的传感器信号，同时，ECU 中的控制器根据接收到的信息进行车身状态量的优化，得到理想的计算结果后，ECU 将计算结果赋予执行机构，以提升汽车的动力学性能。

主动悬架能够处理其他类型的悬架处理不了的工况，明显地改善车辆的动力学性能和车身状态，但是主动悬架高能耗的缺点导致其应用市场并不广泛。馈能悬架能够回收由路面引起的振动能量^[4]，在一定程度上解决了主动悬架高能耗的问题，回收的能量通过充电电路存储于车载电源中，可以驱动车辆行驶或为耗能装置供能，最终实现节能减排。因此，考虑能量回收的馈能悬架既能保证车辆的动力学性能，又能降低能耗，使主动悬架的应用市场更为广阔。

1.2 国内外研究现状

从理论分析上来说，馈能悬架的研究重点有两个，分别是馈能减震器和悬架系统控制器。馈能减震器是馈能悬架系统的核心，它既能提供缓冲路面激励的主动动力，也能回收由路面振动产生的能量；悬架系统控制器是悬架系统的大脑，它负责计算控制律，以优化车身状态。

1.2.1 馈能减震器

(1) 国外研究现状

2012 年，Derick Balsiger 等人分析了传统作动器和馈能作动器的优缺点^[5]：机电制动系统在航空航天领域的应用越来越普遍，传统上以液压-机械(HM)执行机构为基础的系统现在正被机电驱动系统所取代，以追求拥有更高性能的电动飞机。执行机构的主要功能是将能量(水力或电力)转换为机械能，这种工作模式占据了主要的设计重点。第二个设计关注点是将机械能转换回液压或电能。这种能量来自于驱动过程中储存在机械系统中的势能和动能。一部分能量通过执行器流向动力源，在 HM 驱动的情况下，这种能量的管理拥有很好的管理机制，在机电驱动系统中，这种能量通常被称为再生能量，或简称再生能。再生能的传输还需要额外的电路，这就增加了产品的尺寸、成本和复杂性。这种影响对驱动来说是冗杂的，

因此需要最小化。对这种能量进行最优管理以使其价值最大化还没有很好地理解, Derick Balsiger 等人描述了一种描述驱动系统特性的方法, 并在基于仿真的模型中实现了这种特性, 描述了机械系统中势能的来源, 定义了五种再生操作模式, 其中两种基于 EMA, 三种基于分布总线。

同年, Wheeler 等人考虑了作动器更广泛的选择^[6], 允许再生能源到总线, 以达到包括在未来的应用质量规范。对于许多负载, 例如执行器, 如果从规范中去掉避免再生的要求, 那么功率转换器的大小和重量可以显著降低。Wheeler 以再生为例, 以实际飞行剖面为参考, 研究了电动机械执行机构(EMA)驱动飞机副翼的应用, 该研究使用的变换器为两级矩阵变换器。这项研究集中在转换器的输入功率流, 显示的总能量将再生飞机电网非常小, 使用双向功率流转换器的优点是简单减少制动电路的大小。

2015 年, Khoshnoud.F 等人研究了汽车悬架系统的能量采集问题^[7], 通过分析, 确定了车辆动力学中与弹跳、俯仰和横摇模式相关的功率, 计算了这三种模式的发电势值。接下来, 利用四千斤顶振动筛装置进行了实验, 验证了潜在功率收获的分析值。对于所考虑的车辆, 振动筛施加的最大理论功率值 1.1、0.88 和 0.97 kW 分别与每轮 20 Hz 激励频率下的弹跳、俯仰和横摇模式以及 5 mm 的峰值至峰值位移幅值有关, 对应的实验功率值分别为 0.98 kW、0.74 kW 和 0.78 kW。Khoshnoud.F 等人研究了蓄热式执行器在利用动能发电过程中的行为。该钻机代表了四分之一车辆悬架模型, 在该模型中, 减震器系统中的粘性阻尼器被再生系统所取代, 该平台能够演示使用再生系统可以获得的实际电力。针对自动力振动控制的应用, 讨论了利用悬架所获得的能量实现自动力驱动的概念, 提出了悬架能量再生对行驶舒适性和道路操控性的影响, 并结合随机路面激励的能量收集进行了研究。

2017 年, Bolivar E 等人使用具有固有依从性的执行器弹性作动器(SEAs)进行研究^[8], 该作动器已经成为与人类密切相关的机器人系统必不可少的一部分。与刚性执行机构相比, SEA 可以降低给定任务的能耗, 但这种降低高度依赖于海蒂弹性元件的设计。这种设计通常基于自然动力学或参数化优化, 但两种方法都有局限性。自然动力学方法不能考虑执行器约束或任意参考轨迹, 参数化弹性元件只能在给定的参数空间内进行优化。在这项工作中, 我们提出了一个解决这些限制的方案, 将海蒂的弹性元件设计成一个非参数凸优化问题, 它产生了一个全局最优的保守弹性元件, 同时遵照执行器的约束, 证明了具有能量再生能力的任意周期参考轨迹的凸性。Bolivar E 等人讨论了单质量弹簧系统在平地行走时的踝关节运动和具有非线性弹簧的单质量弹簧系统的自然运动所定义任务的优化结果。对于所有这些任务, Bolivar E 等人设计的 SEA 降低了能耗, 满足了执行机构的约束条件。

2018年, Fan Wu 等人为通过降低能量消耗来提高可变阻抗执行器(VIAs)的能量效率^[9]。然而, 在这类系统中收集耗散的能量仍然没有得到充分的探索。Fan Wu 研究利用直流电机的再生制动效应, 提出了一种新的可变阻尼模块设计方法, 使能量再生成为可能。提出的阻尼模块使用四个开关结合再生和动态制动, 使用混合的方法, 使能源再生而不减少阻尼的范围, 通过数值模拟和物理实验表明, 提出的模块在任务性能和能源效率之间实现了最优的平衡。

(2)国内研究现状

2012年, 南京航空航天大学的任龙, 周金波等人研发了一种基于 Halbach 永磁阵列的电磁式馈能减震器^[10], 它是在软磁材料的硬件基础上布置多个线圈绕组, 并引入到整流电路; 在内筒上安置极性异同的 Halbach 永磁阵列; 内筒和外筒之间由弹性元件连接。将该减震器安装在悬架上时, 当传递的路面振动激励作用产生时, 内筒和外筒间产生轴向位移, 外筒中的线圈绕组磁链发生变化, 根据法拉第电磁感应产生了感应电流。

同年, 吉林大学的林鑫对悬架的动力学进行了分析, 由于现今滚珠丝杠的相关模型理论与实际应用有较大异同, 林鑫为了确定导致这种情况的原因, 对馈能减震器中物理量的传递过程进行详细地计算, 找出传统的模型中不够明确和完整的地方, 并建立一套新的减震器数学模型^[11]。将新的数学模型引用到经典 1/4 车辆悬架的模型中, 通过牛顿力学分析等经典研究理论, 确定馈能悬架系统的动力学传递函数及相关的频域特性。然后, 将新模型与经典的悬架模型进行对比, 分析馈能悬架的优劣, 为仿真做准备。理论推导之后, 设计馈能悬架系统的控制器, 并根据之前研究的新的悬架系统模型, 分析簧载质量垂向加速度、悬架动行程、车轮动位移这几个动力学性能的仿真数据的变化, 评价馈能悬架系统中各项参数对悬架各项动力学性能的影响。

2014年, 朱桂林公开了一种可进行能量回收的馈能型减震器^[12]: 作动器的工作缸上部装有吊环, 下缸也装有吊环, 并将螺母安装在下工作缸的中心缸内, 滚珠丝杠上端由轴承支撑, 电机安装在工作缸的上部内端, 啮合齿轮安装在电机传动齿轮上, 通过转动传动带动整个减震器缸的运作。经过实践验证, 这种结构的减震器具有制作简单、花费少、传动效率高、能量回收效率高的优点。

2016年, 沈阳理工大学的任旭辉进行了滚珠丝杠式馈能减震器的研究^[13]。他研发了一款新型的滚珠丝杠式馈能减震器, 该减震器拥有良好的馈能效果。任旭辉对现有的不同类型的馈能减震器的工作原理及其机械结构进行了简单的分析和介绍, 并以此为基础, 提出一种改进机械结构的滚珠丝杠, 并对新的结构方案以及工作原理进行了分析和阐述。其次对滚珠丝杠式馈能减震器的阻尼特性、能量回收特性进行分析, 基于理论分析后, 任旭辉利用仿真软件将新型滚珠丝杠引

入 1/4 车主动悬架, 并对其进行了振动仿真试验, 通过仿真试验对馈能悬架的垂直方向的动力学性能进行分析, 并分析了悬架的幅频特性。最后, 通过联合仿真的方法对馈能悬架的 K&C 特性曲线进行分析。经过仿真分析和验证, 这种新型滚珠丝杠式减震器具有很大的实用性。

2018 年, 张祖涛等人根据不同的机械结构发明了若干种馈能减震器, 同年李明生等人又对具有双向作用筒式减震器进行了改良, 在针对可切换模式的主动悬架缓冲振动困难的问题^[14], 将该双向作用筒式减震器运用其中, 通过仿真分析, 对悬架系统给予脉冲输入作为路面扰动, 得出了应用筒式减震器后悬架的相关动力学性能, 仿真结果表明, 该结构减震器稳定可行。

1.2.2 主动悬架控制算法

(1) 模糊控制算法

早在 1965 年, 美国的 Zadeh 开创了模糊数学, 这种方法对模型不确定的控制系统具有很大的作用, 它是以模糊结合论、模糊语言变量和模糊逻辑推理为主要理论的数控技术。模糊控制是解决非线性控制系统的利器, 属于先进的智能控制, 虽然该方法创立于西方, 却在东方广泛地应用^[15]。

2012 年, 高瑞贞等人利用 ADAMS 软件建立了半车主动悬架模型, 通过 ADAMS 和 MATLAB/Simulink 进行联合仿真, 根据半车模型建立相关动力学方程进行理论推导, 完成模糊控制器的设计。模糊控制器的模糊规则用改进的遗传算法进行优化, 实现汽车半主动悬架系统多体模型模糊控制器的改进遗传算法优化设计^[16]。

2018 年王伟等人提出了一种新的模糊综合优化控制方法, 并将其应用于具有主动悬架系统的半车模型。提出了一种利用与小生境算法相关联的动态接受函数改进的优化算法, 对含有 4 个输入变量和 2 个输出变量的模糊控制规则进行优化, 利用适应度函数选择车体的垂直和滚动振动加速度作为综合控制目标。仿真结果表明, 采用改进的优化算法对模糊控制规则进行优化, 并将其应用于主动悬架系统, 可以显著降低垂直振动加速度和滚动角加速度。同时表明, 垂直位移和滚转角位移也经历了减小过程。所有的数值分析都为所提出的控制方案的应用提供了有力的支持^[17]。

(2) 最优控制算法

最优控制是在大的约束框架下, 通过变分法计算出一个最优控制律, 使得系统的性能指标达到最优。它的过程可以叙述为: 对一个系统, 当扰动出现时, 为了抑制扰动对系统的影响, 选择一个最优控制方案, 使系统的某个初始状态转移到目标状态。该技术应用范围极其广泛, 涉及到航天、工业、医疗、交通等领域。

2016 年,吉林大学的周瑜针对被动悬架难以缓冲较大振动且舒适潜能低的问题,以及主动悬架功耗大和成本大的缺点,通过最优控制中的 LQR 控制算法,分别以 1/4 主动悬架、半主动悬架、七自由度整车悬架为研究模型,应用 MATLAB 进行建模和仿真,模拟相关模型的状态方程,以相应的动力学性能为控制目标获得合理的控制律。最后,根据悬架动行程自适应调整 LQR 的权重系数,求取新的 LQR 控制律,并将新的控制律与之前的控制律进行对比^[18]。

2018 年,张玉峰等人针对主动悬架中 LQG 控制器的权系数依赖于先验知识的缺点,提出了一种免疫粒子群优化算法^[19]。首先利用粒子群算法对参数进行优化,得到拟最优参数作为在线调节的初值,然后利用免疫粒子群算法对参数进行实时优化。该方法简单有效,既能保持粒子群中粒子的多样性,又能提高粒子群算法的收敛速度和早熟性,同时增加了免疫算法的复杂度^{[20][21]}。仿真验证了该方法的可行性和有效性。

(3) 自适应控制算法

自适应是指生物能够根据环境的不同改变自身的特性或是因为环境的变化而使自身进化以适应新环境。因此,直观地说,自适应控制器应当是这样一种控制器,它能修正自己的特性以适对象和扰动动态特性的变化。一方面,同模糊控制,自适应控制也是解决非线性问题的利器,由于研究对象具有不同程度的不确定性和时变性,往往很难建立系统的精确模型。另一方面,同最优控制,自适应控制算法仍然是一种基于数学模型的算法。在自适应控制算法下,系统一开始可能性能不好,但是随着系统的运行,通过一些自适应的数学手段处理后,系统逐渐向理想的状态行进,最终达到满意的状态。

2018 年,长安大学汽车学院的余曼等人研发了一种基于 T-S 模糊模型的车辆电液悬架系统 H_{∞} 控制。为了降低悬架功耗并且提高系统的鲁棒性,余曼等人搭建了车辆的七自由度整车模型,运用 T-S 建模技术设计主动悬架上层 H_{∞} 控制器,并在下层设计了自适应控制器。研究表明:在激励不大的情况下,基于 T-S 模型的 H_{∞} 主动控制悬架和被动悬架进行对比,各动力学性能都有很大的改善。当激励较大时,下层自适应控制器解决了悬架参数时变性的问题,使主动悬架依然能够保持一定的鲁棒性,各动力学性能均得到优化。

(4) 鲁棒控制算法

鲁棒控制自提出以来,受到了人们的广泛重视和研究,取得了一系列的研究结果和方法,并在一些工程领域中获得了成功的应用。特别地,随着线性矩阵不等式 (LMI) 及凸优化问题解决方法的提出,很多控制问题得到了快速地解决。Matlab 软件中 LMI 工具箱的推出使得各种 LMI 问题的求解更加便捷,目标函数和约束条件都可以用 LMI 去描述,从而进一步推动了线性矩阵不等式处理方法在

控制系统中的应用。

2015年,合肥工业大学的张荣芸研究了一种考虑刚度变化、感抗元件电感变化以及传动机构磨损造成非线性影响增加的主动悬架LPV模型,设计了一种 H_∞ 鲁棒控制器,通过仿真软件建立了三自由度的汽车非线性模型,并对其横摆角速度、俯仰角速度进行了分析,仿真结果验证了控制策略的有效性^{[22][23]}。

1.3 主要研究内容

根据现有文献资料,目前馈能悬架的控制算法主要存在以下问题:

- 1.多数文献并没有考虑馈能与乘坐舒适性的协调,能量回收具有随机性。
- 2.在鲁棒控制算法中,为了降低解的保守性,通常采用引入松弛变量的方法,对输出反馈尚未有明确的处理方法。

针对上述问题,本人利用LMI给出解决上述问题的方法,主要内容如下:

(1)1/4车辆主动悬架及路面模型

1/4车辆主动悬架模型是经典的悬架分析模型,由于前人已推证和应用,本文不再进行模型验证。路面扰动是悬架运动状态改变的主要原因,因此,要对路面扰动的模型进行详尽的分析和计算,本文研究两种路面输入模型:随机路面模型和确定性路面模型。

(2)减震器的机械结构和电机的选型

根据不同结构的减震器的实际应用效果、电机的运行特点以及造价成本等因素,本文减震器的机械结构选用滚珠丝杠式,电机选用永磁无刷直流电机。

(3)基于不同控制算法的馈能式主动悬架控制器和执行机构跟踪控制的设计

本文采用双层控制结构,上层分别采用基于遗传算法的LQR控制器^[23]、 H_∞ /广义 H_2 状态反馈控制器和 H_∞ /广义 H_2 输出反馈控制器,并进行仿真效果比较。在鲁棒控制器设计中,引入基于S-procedure的扩展LMI法,降低最优性能的保守性;下层采用反步法跟踪控制器。上层控制器根据当前车身状态和设计好的控制算法输出控制力,输出控制力与执行电机的电流按照线性关系处理^[24]。

通过Matlab/Simulink搭建路面坑包输入和1/4车辆馈能悬架系统模型,其中馈能悬架模型采用主动悬架和电机电路串联的模式,利用LMI工具将约束条件和目标函数(车身垂向加速度、轮胎动位移、作动器电流、馈耗比^[24])写入M文件中,并以此M文件运行Simulink模型,通过仿真数据,分析确定性路面输入下不同控制算法的控制效果。

(4)悬架系统的参数扰动问题

采用多胞线性变参数变增益 H_∞ /广义 H_2 输出反馈控制算法。

通过上述方法以及仿真实验对比分析,本人在一定程度上解决了提高馈能悬架能量回收效率,降低输出反馈控制解的保守性

第2章 悬架系统模型

主动悬架采用主动控制机制，通过车载ECU计算出的控制律传达给作动器，使其提供作动力来抵抗路面的振动。馈能悬架是主动悬架中的一种，其除了拥有主动悬架的相关性能，还具备了能量回收的特点。因此，馈能悬架的系统模型可分为悬架模型本身和电机电路两个部分。本章针对整个馈能悬架系统，分析并建立路面扰动模型、主动悬架模型、作动器电机电路模型，除此以外，本章还引入有关馈能悬架能量回收评价指标的概念。

2.1 路面模型建立

要分析悬架的性能，就需要建立路面输入模型。根据路面模型的分析方式不同，可分为确定性路面激励和随机路面激励。确定性路面激励是指对车辆具有脉冲或阶跃作用的扰动信号，可以用常用的函数算式表示；随机路面激励是指未知路面对汽车产生连续作用的扰动信号，没有明确的表达式，采用统计学的方法进行描述。

2.1.1 随机路面模型

将路表面距标准水平面的距离设为 x_g ，则路面轮廓大致如图2.1。

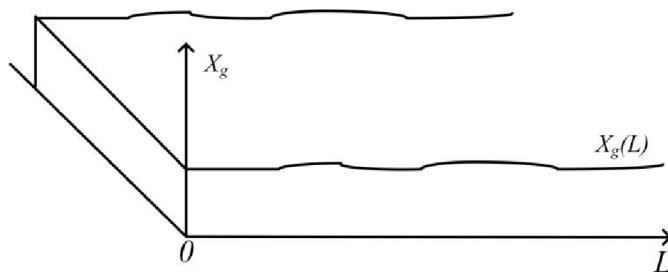


图2.1 路面不平度曲线

由于路面的崎岖凹凸程度不同，在对路段进行数据收集时，很难获得相同的路面轮廓模型。文献[25]指出，路面的平整度数据趋向于统计学中的正态分布，现有的仿真软件对此提供了很大的便利。

根据 GB/T7031-1986 中描述，路面功率谱密度为

$$G_{x_g}(n) = G_{x_g}(n_0) \left(\frac{n}{n_0} \right)^{-w_0}$$

其中， $G_{x_g}(n_0)$ 表示路面不平度系数， n 表示空间频率， n_0 表示参考空间频率， $n_0 = 0.1m^{-1}$ ， w_0 是频率指数。

可以根据不同路面的功率谱密度将路面不平度分成 8 个等级。表 2.1 描述的是

不同等级路面的不平度系数 $G_{x_g}(n_0)$ 的变化范围及其几何平均值 σ_{x_g} [25]，分级路面谱的频率指数是 2。

表 2.1 路面不平度 8 级分级标准

路面等级	$G_{x_g}(n_0) \times 10^{-6} m^2/m^{-1}$ $n_0 = 0.1 m^{-1}$			$\sigma_{x_g} \times 10^{-3} m$ $0.011 m^{-1} < n < 2.83 m^{-1}$		
	下限	几何平均值	上限	下限	几何平均值	上限
A	8	16	32	2.69	3.81	5.38
B	32	64	128	5.38	7.61	10.77
C	128	256	512	10.77	15.23	21.53
D	512	1024	2048	21.53	30.45	43.06
E	2048	4096	8192	43.06	60.9	86.13
F	8192	16384	32768	86.13	121.8	172.26
G	32768	65536	131072	172.26	243.61	344.52
H	131072	262144	524288	344.52	487.22	689.04

在分析路面不平而引起的振动对汽车产生的影响时，必须考虑汽车的时速。为了分析方便，通常把空间频谱函数转化为时间频谱函数。二者之间的转换关系为：

$$G_{x_g}(f) = \frac{G_{x_g}(n)}{v} \quad (2.1)$$

式中 f 为时间频率，单位为 s^{-1} ； v 表示车辆行驶速度，单位 m/s 。空间频率 n 和时间频率 f 之间的代数关系为：

$$f = v \cdot n \quad (2.2)$$

用一个简单的数学公式来描述随机路面轮廓，即：

$$\dot{x}_g(t) = -2\pi f_0 x_g(t) + 2\pi n_0 \sqrt{G_{x_g}(n_0)} v w(t) \quad (2.3)$$

式中 $w(t)$ 是白噪声信号输入， x_g 代表路面位移， v 代表车辆行驶速度， $G_{x_g}(n_0)$ 代表路面不平度系数。

2.1.2 确定性坑包路面模型

确定性路面输入是指：对于悬架系统，扰动输入可以表示为来自路面的脉冲、阶跃类信号，它表达的是随机路面上一个固定的坑包。按照常理，我们所分析的这种扰动信号具有短暂、突然的特点，因此，可以直接将这种扰动信号的类型当做脉冲或阶跃信号。根据相关汽车平顺性脉冲输入行驶实验法（参考国家标准 GB4970-85），本文采用如下常见坡型单凸块作为系统输入 [26]。

考虑路面上的一个具有如下轮廓的长坡型单凸块

$$\frac{A_m}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi}{L} l\right), \quad 0 < l < L \quad (2.4)$$

式中高度为 $A_m = 0.1m$ ，长度为 $L = 5m$ ，对应的路面垂直速度输入由下式给出：

$$\dot{x}_g = \begin{cases} \frac{\pi v A_m \sin(\frac{2\pi v}{L} t)}{L} & 0 \leq t \leq \frac{L}{v} \\ 0 & t > \frac{L}{v} \end{cases} \quad (2.5)$$

2.2 馈能悬架系统模型

2.2.1 馈能减震器方案

减震器的结构和功能是馈能悬架与一般主动悬架最主要的区别。减震器的机械结构主要有四种：滚珠丝杠式馈能减震器、齿轮齿条式馈能减震器、直线电机式馈能减震器和液电馈能式馈能减震器^[27]。相比于其它三种机械结构的馈能减震器，滚珠丝杠式减震器具有尺寸小、成本低、传动效率高、低损耗的优点，本文馈能悬架减震器机械结构选型部分选择滚珠丝杠式。滚珠丝杠式馈能减震器主要由丝杠、齿轮、滚珠、螺旋式丝杆以及电机组成，其结构如图2.3所示。

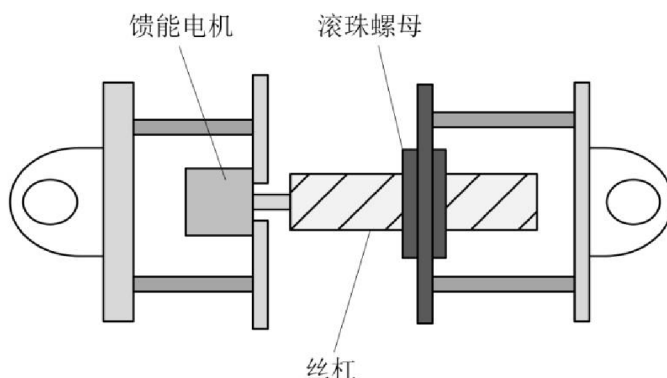


图2.3 滚珠丝杠式减震器结构图

该馈能减震器的工作原理是：汽车在行驶过程中，轮胎因遇到路面不平产生颠簸形变，导致整车发生振动，此时，减震器产生垂向位移，滚珠在丝杠螺纹轨道上滚动，将路面激励引起的垂直位移转化为转动位移。这时，车载ECU通过控制器求出理想作动力大小，电机电路根据处理器所发弱电信号给电机供电，电机处于主动旋转状态，使丝杠运动方向与振动方向相反，这一过程中，滚珠处于随动状态；电机在转动的同时提供阻尼力，滚珠丝杠结构又可以将垂向位移转化为电机的被动旋转，电机发电，充电电路将电能输送到储电设备^[28]。

2.2.2 馈能悬架模型建立

二自由度的1/4悬架模型是模型分析中较为经典的一种悬架模型，该模型在悬架的分析计算以及控制算法的研发中起到很大的作用。它的优点在于模型简洁，

线性度高，而且能比较准确地说明车辆在行驶过程中的动力学特性^[29]，图2.4为主动悬架模型示意图：

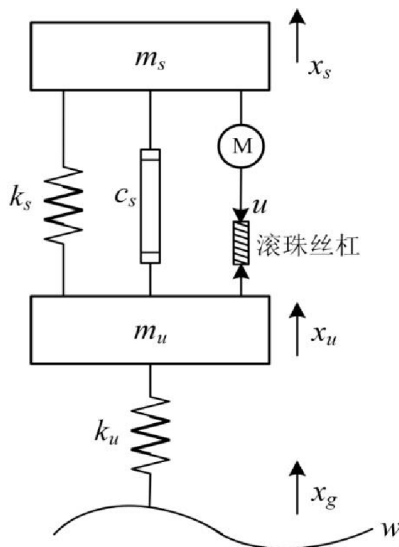


图2.4 1/4车辆馈能悬架模型图

根据汽车动力学理论得到模型的动力学微分方程如下：

$$\begin{cases} m_s \ddot{x}_s = -k_s(x_s - x_u) - c_s(\dot{x}_s - \dot{x}_u) + u \\ m_u \ddot{x}_u = k_s(x_s - x_u) + c_s(\dot{x}_s - \dot{x}_u) - k_u(x_u - x_g) - u \end{cases} \quad (2.6)$$

图2.4中， m_s 和 m_u 分别为悬架簧载质量和非簧载质量； x_s 、 x_u 和 x_g 分别为簧载质量位移、非簧载质量位移和轮胎形变； k_s 、 k_u 和 c_s 分别为悬架刚度、轮胎刚度和减振器阻尼系数；根据牛顿力学和其他相关理论知识，可以将1/4车馈能悬架动力学模型中的主动悬架部分表示为^[29]：

$$\dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u \quad (2.7)$$

式中： $x = [x_s - x_u \quad \dot{x}_s \quad x_u - x_g \quad \dot{x}_u]^T$

$x_s - x_u$ 代表悬架动行程， \dot{x}_s 代表簧载质量速度， $x_u - x_g$ 代表轮胎形变， \dot{x}_u 代表非簧载质量速度。

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -\frac{k_s}{m_s} & -\frac{c_s}{m_s} & 0 & \frac{c_s}{m_s} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_s}{m_u} & \frac{c_s}{m_u} & -\frac{k_u}{m_u} & -\frac{c_s}{m_u} \end{bmatrix}, \quad B_1 = [0 \quad 0 \quad -1 \quad 0]^T, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{m_s} & 0 & -\frac{1}{m_u} \end{bmatrix}^T,$$

u 为作动力控制输入， w 为路面速度输入。

2.2.3 电机等效电路

主动悬架作动器的电机电路可以用直流电机的等效电路图来表示^[30]，其原理如图2.5所示，下图是电机工作时的等效电路图，图中 U 为电源电压， E 为电机电动势， R 为电路总电阻， I 为电路总电流， L 为电路总电感。

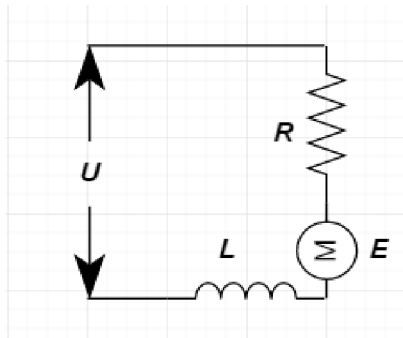


图2.5电机等效电路图

不考虑非线性因素和扰动，电磁馈能悬架的理想减震器具有如下线性关系^[31]

$$E = \varphi \dot{z} \quad (2.8)$$

$$F = \varphi I \quad (2.9)$$

式中， z 是滚珠丝杠螺杆的垂向位移， \dot{z} 是滚珠丝杠螺杆的垂向速度， φ 是电磁悬架的电机常数^[31]， F 为电机输出的作动力，且有 $u=F$ 。

2.3 馈能悬架评价指标

通常，车辆悬架的性能指标一般是指有关乘坐舒适性的簧载质量垂直加速度，约束考虑悬架动行程不超过限位块、轮胎动载小于静载和作动器饱和，但是在馈能悬架的前提下，还应该引入评价馈能效果的指标，即当车辆在行驶途中遇到路面激励后，回收因振动产生的能量的多少，因此，馈能悬架的评价指标应该要加入馈耗比这个指标^[32]。

2.3.1 馈能原理

下面分析馈能悬架能量回收的机理。能量回收的核心装置是电机，根据电机的运行规律，可以得到馈能悬架的馈能原理^[32]。

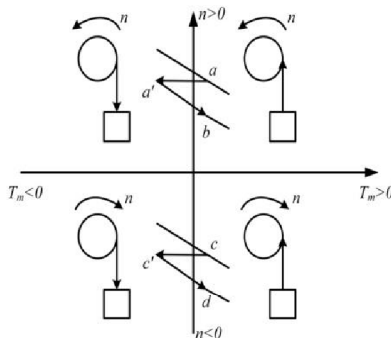


图2.6电机运行图

定义转矩 T_m 和转速 n ，选择逆时针方向为转速正方向。根据电机运行的转矩 T_m 和转速 n 的方向，可以将坐标系分为四个象限，如图 2.6 所示。第一象限表示电机提升重物，第四象限表示电机放下重物。在第四象限时转速 $n < 0$ ，电机要一边输出逆时针转矩 T_m 抵抗重物下落，一边以某一速度顺时针旋转，电机工作在发电机状态。第三象限中，重物由于重力不够不能自然下落，因此，电机处于发电状态，可以为重物提供输出转矩，重物才能够下落，这时 $T_m < 0$ 且 $n < 0$ 。在第二象限，无论电机的工作状态处于哪个位置，都不会保持稳定，但在过渡过程中可以有这样的状态，比如说，当电机的运行状态处于第一象限时，想要使得当时的转速从 a 点迅速地下降到 b 点，如果考虑到电机的惯性，这种惯性会导致转速保持在一个连续的变化过程，因此，在过渡过程中，电机的转速一瞬间会保持不变，即从 a 点移到第二象限的 a' 点，电机工作于发电状态，之后，电机开始减速，最终在 b 点稳定运行。除此以外，观察在第四象限的 c 点，这时，电机低速运行，希望电机能够快速升到 d 点，同上述分析，电机的运行会沿着 $c \rightarrow c' \rightarrow d$ 的运行状态变化，因此，在过渡过程中，电机的运动状态也会在第三象限中出现，这样，电机就可以在电动机和发电机两种模式下切换变化。

综上所述，当电机运行状态处于第一象限和第三象限，电机工作在电动机状态，这时，相当于电机提供主动控制力来应对振动；当电机运行状态处于第二象限和第四象限，电机的工作模式是发电机状态，悬架处于随动状态，此时，电机既可以产生阻尼力抑制由路面不平引起的振动又可以将由振动引起的耗损能量回收。

2.3.2 馈能效率

车辆在行驶过程中，确定性路面的脉冲信号可以作为悬架系统的扰动输入，实车中，路面扰动会导致簧载质量和非簧载质量的相对运动，此时传动机构会将这种相对运动的位移转化为转动，进而转化为电能回收；当然，车身振动得越厉害，能量回收的越多，但影响了乘坐舒适性，这时，控制器通过传感器获得的状态量和设计好的控制算法计算需要的控制律，通过该控制律即可获得相应的作动力，电机电路可以实现这一执行步骤。电机回收的电能通过整流电路引到存储装置，而作动器消耗的电能也可以由电能存储装置提供，这就相当于回收的能量存储在车载电池中，而车载电池又可以供给耗能装置电能，等于是间接供电，构成了一个循环，因此，当汽车在路面行驶时，由于路面不平引起了振动，汽车轮胎在接触到坑包的一瞬间，即产生了这种能量的消耗和回收。馈耗比就是指在产生了能量消耗和回收的过程中，馈能装置回收的总能量与被动装置消耗的总能量的比，这是评价馈能效果的指标之一。

设 P_r 为馈能悬架回收能量的功率， P_p 为被动悬架所消耗的功率，则有

$$\eta_s = \frac{P_r}{P_p}. \quad (2.10)$$

式中， η_s 代表馈能悬架的馈能效率^[33]。

在一定时间内，对馈能效率关于时间进行积分，则可以获得回收的总能量与被动悬架减震器消耗的能量之比，即馈耗比，通常馈耗比越大，馈能效果越好。

2.4 本章小结

汽车在行驶过程中，路面的扰动激励是导致汽车改变稳定运行状态的最主要原因，所以，在研究悬架性能时要详细地分析路面扰动的输入模型。因为路面振动具有重复性，本文选用确定性路面输入作为验证，并建立其数学模型。在机械结构上，选择滚珠丝杠式，电机选择上，选择永磁无刷直流式，这样本文的研究对象就能确定下来，建模明确。有了清晰的建模思路，通过相应的理论知识，建立了馈能悬架的主动悬架和电机电路模型：悬架模型采用经典1/4车辆主动悬架模型，电机电路采用直流电机等效电路。同时，为了分析馈能悬架的馈能效果，提出馈耗比这一概念，并给出演算过程，后文将结合馈耗比来验证控制算法的有效性。

第3章 LMI 理论知识

本章将阐述线性矩阵不等式 (LMI)、扩展线性矩阵不等式等理论知识, 这部分内容是本文后几章控制器设计的基础。LMI从提出起就被广泛地用来解决系统控制的优化问题, 因为它可以很好地表达目标函数和约束条件, 直接易懂。随着LMI相应求解方法的提出以及相应软件的研发, LMI这一数学工具越来越受到人们的青睐, 运用LMI解决系统控制的问题已成为许多领域中的研究热点。

3.1 线性矩阵不等式

控制问题有两大任务, 一是分析, 二是设计。分析就是研究控制系统具有的性能, 设计就是给一个系统, 它的性能不够好, 通过反馈控制的方式改进它的性能。

LMI本身就是优化理论, LMI有三个关键词, 线性, 矩阵, 不等式。 $A^T P + PA = -Q$ 是线性系统理论中关于稳定性方面的基本结果, 即李雅普诺夫方程。如果把等号换为小于号, 它就变成了一个线性矩阵不等式。这里面 P 是未知的变元, 是需要求解的, A 和 Q 是给定的。把李雅普诺夫方程的整体看做一个矩阵, 小于号代表它是负定的, 而且是对称负定的, 本文所有的不等号都代表矩阵的正定与负定。

3.1.1 标准的 LMI 问题

假定 F 、 G 和 H 是对称的矩阵仿射函数, c 是一个给定的常数向量。标准的 LMI问题一共分为三种: 可行性问题、特征值问题、广义特征值问题, 本文只用到 LMI工具中的可行性和特征值问题, 下面对这两个问题进行介绍:

1. 可行性问题^{[34][35]}: 假设给定一个LMI: $F(x) > 0$, 对于满足这个LMI的 x , 我们称这个 x 就是 $F(x)$ 的可行解, 这个LMI就是可行的。

2. 特征值问题^[35]: 在解决某一实际问题时, 存在着一定的约束条件, 如果矩阵 $G(x)$ 特征值的最值在满足约束的条件下可以求出一组解, 那么我们就说这个问题是LMI的特征值问题。数学表达式如下:

$$\begin{aligned} \min \lambda \\ \text{s.t. } G(x) < \lambda I, \\ H(x) < 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

3.1.2 相关理论

考虑以下状态方程:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bw \\ z = Cx + Dw \end{cases} \quad (3.2)$$

设该系统的传递函数为 $G(s)$ 。

以此传递函数展开关于 LMI 的理论知识:

(1) S-procedure

在控制系统的Robust分析和Robust综合中，我们一定要用S-procedure去描述如何将非凸优化问题转化为凸优化问题^[36]。

对 $k = 0, 1, \dots, N$, 设 $\sigma_k : V \rightarrow R$ 是定义在一个线性向量空间 V (例如 $V = R^m$) 上的实值泛函，考虑以下两个条件：

S1: 对使得 $\sigma_k(y) \geq 0, k = 0, 1, \dots, N$ 的所有 $y \in V$ ，有 $\sigma_0(y) \geq 0$ ；

S2: 存在标量 $\tau_k, k = 0, 1, \dots, N$ ，使得对任意的 $y \in V$ ，有

$$\sigma_0(y) - \sum_{k=1}^N \tau_k \sigma_k(y) \geq 0$$

能够很明显地发现，S2可以推出S1。S-procedure实质上就是通过判断S2是否是真命题来验证S1，即S2是S1的充要条件。推导过后会发现，其实，S2比S1要更容易推导，所以，通过S-procedure的处理方法可以更容易检验S1是否是真命题。

考虑二次型函数的情况：

$$\sigma_k(y) = y^T Q_k y + 2s_k^T y + r_k, k = 0, 1, \dots, N$$

其中： $Q_k \in R^{m \times m}, s_k \in R^m, r_k \in R, Q_k$ 是对称的。由于：

S1. σ_0 一般不是一个凸函数；

S2. 约束集 $\Omega = \{y \in R^m : \sigma_k(y) \geq 0, k = 0, 1, \dots, N\}$ 一般也不是凸的。

显然， $\min_{y \in \Omega} \sigma_0(y) \geq 0$ 是一个NP HARD问题^[36]。

另一方面，由于：

$$S2 \Leftrightarrow \text{存在 } \tau_k \geq 0, \text{ 使得对任意的 } y \in R^m \quad \sigma_0(y) - \sum_{k=1}^N \tau_k \sigma_k(y) \geq 0$$

\Leftrightarrow 存在 $\tau_k \geq 0$ ，使得

$$\begin{bmatrix} Q_0 & s_0 \\ s_0^T & r_0 \end{bmatrix} + \sum_{k=1}^N \tau_k \begin{bmatrix} Q_k & s_k \\ s_k^T & r_k \end{bmatrix} \geq 0. \tag{3.3}$$

因此，S2表示成一个转换形式后的等价LMI可行性问题，我们求解这个LMI问题即可，通过内点法或其它有效计算方法判断这个LMI组是否可行。S-procedure的处理方法是通过检验上面这个线性矩阵不等式问题的可行性来检验S1是否成立。

条件S1和条件S2一般是不等价的，当这两个条件等价时，这个S-procedure就是无损的，否则称为有损的^[36]。在常规模型计算中，使用的S-procedure一般是有损的^[36]。

以上结论在本文中具有重要的作用。

(2) 定理

定理 1 (1) 对于 $\sigma_1(y) = y^T Q_1 y + 2s_1^T y + r_1 \geq 0$ ，假定存在一个 $\tilde{y} \in R^m$ ，使得

$\sigma_1(\tilde{y}) > 0$ ，则以下两个条件是等价的^[36]。

S1: 对使得 $\sigma_1(y) > 0$ 的所有 $y \in \mathbb{R}^m$ ， $\sigma_0(y) = y^T Q_0 y + 2s_0^T y + r_0 \geq 0$ ；

S2: 存在 $\tau \geq 0$ ，使得以下的线性矩阵不等式是可行的：

$$\begin{bmatrix} Q_0 & s_0 \\ s_0^T & r_0 \end{bmatrix} + \sum_{k=1}^N \tau_k \begin{bmatrix} Q_k & s_1 \\ s_1^T & r_1 \end{bmatrix} \geq 0, \quad (3.4)$$

(2)对 $\sigma_1(y) = y^T Q_1 y \geq 0$ ，假定存在一个 $\tilde{y} \in \mathbb{R}^m$ ，使得 $\sigma_1(\tilde{y}) > 0$ ，则以下两个条件是等价的^[36]。

S1: 对使得 $\sigma_1(y) > 0$ 的所有非零 $y \in \mathbb{R}^m$ ， $y^T Q_0 y > 0$ ；

S2: 存在 $\tau \geq 0$ ，使得 $Q_0 - \tau Q_1 > 0$ 。

(3) 性质

性质1: 含有虚数的线性矩阵不等式处理方法。引入S-procedure和KYP引理^[36]，可以得到带有复变量的LMI，通过S-procedure转化为实变量线性矩阵不等式

形如 $S_1 + jS_2 < 0$ 的线性矩阵不等式可通过引理2转化为 $\begin{bmatrix} S_1 & S_2 \\ -S_2 & S_1 \end{bmatrix} < 0$ 。

(4) 引理

引理1 Schur 补引理^[36]

考虑一个对称矩阵 $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ，将 S 进行 2×2 分块后，获得 $S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}$

以下三个条件是等价的：

S1: $S < 0$

S2: $S_{22} - S_{12}^T S_{11}^{-1} S_{12} < 0$

S3: $S_{22} < 0$ ， $S_{11} - S_{12} S_{22}^{-1} S_{12}^T < 0$

引理2 有界实引理(H_∞ 性能)^[36]

给定一个实数 $\gamma_1 > 0$ ，则以下条件等价：

S1: 系统渐进稳定，且 $\|G\|_\infty < \gamma_1$ ；

S2: 存在一个对称正定矩阵 P ，使得

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA & PB & C^T \\ (PB)^T & -I & D^T \\ C & D & -\gamma_1^2 I \end{bmatrix} < 0. \quad (3.5)$$

证明：

由矩阵不等式可以推出 $A^T P + PA < 0$ ，由于矩阵 $P > 0$ ，因此系统是渐进稳定的，根据引理1，进一步等价于

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA + C^T C & PB + C^T D \\ (PB + C^T D)^T & D^T D - \gamma^2 I \end{bmatrix} < 0, \quad (3.6)$$

对上式左乘 $\begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix}^T$ 和右乘 $\begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix}$, 并且将 $\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bw \\ z(t) = Cx + Dw \end{cases}$ 带入其中, 可得

$z^T z + x^T P \dot{x} + \dot{x}^T P x - \gamma^2 w^T w < 0$ 。设 $V = x^T P x$, 则

$$\dot{V} = x^T P \dot{x} + \dot{x}^T P x, \quad (3.7)$$

根据系统渐进稳定, 当 t 趋近于无穷时, 对上式积分可得

$$z^T z - \gamma^2 w^T w < V(0), \quad (3.8)$$

$\|G\|_\infty < \gamma$ 得证。

H_∞ 性能^[36]: 定义从扰动输入 $w(t)$ 到性能输出 $z(t)$ 的传递函数的 H_∞ 范数为

$$\|G\|_\infty := \sup_{w \in L_2} \frac{\|z\|_2}{\|w\|_2}, \text{ 其中 } w \in L_2 \text{ 表示 } w \text{ 是能量有界的信号, 即 } \|w\|_2^2 := \int_0^\infty w^T(t)w(t)dt < \infty$$

引理3 有界实引理(广义 H_2 性能)^[36]

给定一个实数 $\gamma_2 > 0$, 则以下条件是等价的

S1: 系统渐进稳定, 且 $\|G\|_g < \gamma_2$

S2: 存在一个对称正定矩阵 P , 使得

$$(1) \begin{bmatrix} A^T P + PA & PB \\ (PB)^T & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (2) \begin{bmatrix} P & C^T \\ C & \gamma_2^2 I \end{bmatrix} > 0$$

证明:

由矩阵不等式可以推出 $A^T P + PA < 0$, 由于矩阵 $P > 0$, 因此系统是渐进稳定的, 对矩阵不等式左乘 $\begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix}^T$ 和右乘 $\begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix}$, 并且将 $\dot{x} = Ax + Bw$ 带入, 可得

$$x^T P \dot{x} + \dot{x}^T P x - \gamma^2 w^T w < 0, \quad (3.9)$$

由于 $V = x^T P x$, 则 $\dot{V} = x^T P \dot{x} + \dot{x}^T P x$

$$\dot{V} - \gamma^2 w^T w < 0, \quad (3.10)$$

对上式积分, 可得

$$x^T P x < \int_0^t w^T(\tau)w(\tau) + x^T(0)P x(0) d\tau, \quad (3.11)$$

根据引理1, 线性矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} P & C^T \\ C & \gamma_2^2 I \end{bmatrix} > 0, \quad (3.12)$$

等价于

$$C^T C < \gamma^2 P, \quad (3.13)$$

由此可得

$$\begin{aligned} z^T z &= x^T(t)C^T Cx(t) < \gamma^2 x^T(t)Px(t) < \gamma^2 \int_0^t w^T(\tau)w(\tau)d\tau + \gamma^2 x^T(0)Px(0) \\ &\leq \gamma^2 \int_0^\infty w^T(\tau)w(\tau)d\tau + \gamma^2 x^T(0)Px(0) \end{aligned} \quad (3.14)$$

上式对 $t \in [0, \infty)$ 均成立, 由于 $x(0) = 0$, 所以有 $V(0) = 0$; 根据广义 H_2 性能的定义, 对任意的 $w(t)$ 均有 $\|G\|_g < \gamma$, 命题得证。

广义 H_2 性能^[36]: 定义从输入 $w(t)$ 到输出 $z(t)$ 的广义 H_2 范数

$$\|G\|_g := \sup \{ \|z(t)\| : x(0) = 0, t \geq 0, \int_0^t \|w(\tau)\|^2 d\tau \leq 1 \} \quad \text{或} \quad \|G\|_\infty := \sup_{w \in L_2} \frac{\|z\|_\infty}{\|w\|_2}, \quad \text{其中}$$

$$\|z\|_\infty = \sup_{t \geq 0} \sqrt{z^T(t)z(t)}.$$

引理4 广义KYP引理^[36]: 给定矩阵 Θ, F, Φ, Ψ , $T_w = [I \quad -j\omega I]$, N_w 代表 $T_w F$ 的零空间, 那么, 不等式 $N_w^* \Theta N_w < 0, \omega \in [\omega_1 \quad \omega_2]$ 成立, 当且仅当存在正定矩阵 P, Q ,

$$\text{以至于 } F^*(\Phi \otimes P + \Psi \otimes Q)F < 0 \quad \Phi = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \Psi = \begin{bmatrix} -1 & j\omega_c \\ -j\omega_c & -\omega_1 \omega_2 \end{bmatrix}$$

引理5 设 Z 是一个对称矩阵, 且被分解成3行3列的分块矩阵形式, 则存在矩阵 X , 使得^[36]

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} \\ Z_{12}^T & Z_{22} & Z_{23} + X^T \\ Z_{13}^T & Z_{23}^T + X & Z_{33} \end{bmatrix} < 0, \quad (3.15)$$

当且仅当

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{12}^T & Z_{22} \end{bmatrix} < 0, \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{13} \\ Z_{13}^T & Z_{33} \end{bmatrix} < 0, \quad (3.16)$$

如果式(3.16)成立, 则使得不等式成立的一个矩阵 X 如下:

$$X = Z_{13}^T Z_{11}^{-1} Z_{12} - Z_{23}^T. \quad (3.17)$$

(6) 扩展LMI相关引理

引理6: 设 M 和 N 是具有合适维数的矩阵, 则以下条件^[36]是等价的

$$S1: \begin{bmatrix} I \\ N \end{bmatrix}^T M \begin{bmatrix} I \\ N \end{bmatrix} < 0$$

S2: 存在一合适维数的矩阵 F , 使得

$$M + \begin{bmatrix} N^T \\ -I \end{bmatrix} F^T + F \begin{bmatrix} N & -I \end{bmatrix} < 0$$

这条引理可以通过消去引理证明得到^[36]。

引理7: 以下条件^[36]是等价的

S1: 存在 $\gamma > 0$, 且 $\|G\|_\infty < \gamma$

S2: 存在一实矩阵 F 和对称正定矩阵 X_∞ , 使得不等式

$$(1) \begin{bmatrix} -[F]_s & (A^T F + X_\infty)^T & (BF)^T & F^T & 0 \\ A^T F + X_\infty & -X_\infty & 0 & 0 & C^T \\ BF & 0 & -I & 0 & D^T \\ F & 0 & 0 & -X_\infty & 0 \\ 0 & C & D & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0$$

$$(2) \begin{bmatrix} -[F]_s & (A^T F + X_\infty)^T & (CF)^T & F^T & 0 \\ A^T F + X_\infty & -X_\infty & 0 & 0 & B \\ CF & 0 & -I & 0 & D \\ F & 0 & 0 & -X_\infty & 0 \\ 0 & B^T & D^T & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0$$

成立。

证明: 由引理7中的条件S2推导S1

$$\begin{aligned} \text{改写(1)} \quad & \begin{bmatrix} -[F]_s & (A^T F + X_\infty)^T & (BF)^T & F^T & 0 \\ A^T F + X_\infty & -X_\infty & 0 & 0 & C^T \\ BF & 0 & -I & 0 & D^T \\ F & 0 & 0 & -X_\infty & 0 \\ 0 & C & D & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \text{ 为} \\ & \begin{bmatrix} 0 & X_\infty^T & 0 & 0 & 0 \\ X_\infty & -X_\infty & 0 & 0 & C^T \\ 0 & 0 & -I & 0 & D^T \\ 0 & 0 & 0 & -X_\infty & 0 \\ 0 & C & D & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} + \\ & \begin{bmatrix} N^T \\ -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} F & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N & -I \end{bmatrix} < 0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

根据引理1可推得下式:

$$\begin{bmatrix} [A^T X_\infty]_s - X_\infty & X_\infty B & X_\infty & C^T \\ (X_\infty B)^T & -I & 0 & D^T \\ X_\infty^T & 0 & -X_\infty & 0 \\ C & D & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0, \quad (3.19)$$

两步Schur补引理即可得到有界实引理的LMI, 命题得证。

$$G = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, G^T = \begin{pmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{pmatrix}, \|G\|_\infty = \|G^T\|_\infty, (1) (2) \text{ 等价}$$

引理8: 对于闭环LPV系统, 如果存在对称正定矩阵 X , 满足下式的LMI约束, 则称该LPV系统是 $D(q,r)$ 上稳定的^[36]。

$$\begin{bmatrix} -rX & qX + AX \\ (qX + AX)^T & -rX \end{bmatrix} < 0. \quad (3.20)$$

3.2 本章小结

本章主要对LMI的相关知识进行了介绍, 其中包括典型的LMI问题、将实际问题转化为LMI问题的方法、LMI中的相关理论、LMI的定理证明、LMI的引理证明, 为下章鲁棒控制器的设计做出理论铺垫。

第4章 馈能悬架名义系统控制算法

本章针对馈能悬架名义系统设计相应的控制器，包括基于遗传算法的 LQR 控制器、状态反馈控制器、输出反馈控制器、基于扩展 LMI 的状态反馈控制器和基于扩展 LMI 的输出反馈控制器，在控制器的设计过程中引入 S-Procedure 方法，将状态反馈控制器和输出反馈控制器中的李雅普诺夫矩阵解耦，降低保守性。目前，多数文献仅提供了将扩展 LMI 引入状态反馈控制器的求解过程，本人将扩展 LMI 引入输出反馈控制器的求解中，采用变量替换法解决了解耦后的输出反馈 LMI 组存在高阶项的问题，并通过 Matlab 软件仿真分析所求解的控制器的有效性。

4.1 控制方案

4.1.1 控制问题描述

馈能悬架的控制器设计要从控制目标出发，此外还要考虑悬架的硬约束要求，从前文建模来看，馈能悬架问题实际上可以归结为有时域硬约束的干扰抑制问题。

车身的垂向加速度是影响乘客乘坐舒适性的直接因素，因此设计控制器需要抑制垂向加速度的大小。另外，考虑到馈能悬架回收能量的问题，通过参考文献得知馈能悬架的馈耗比越大，馈能效果越好。根据馈耗比和能耗分析可知，车辆动能变化量、弹性元件吸收的能量、轮胎消耗的能量是对馈能效果影响较大的三个因素。如此，可以从降低轮胎消耗的能量方面入手，即抑制轮胎消耗的能量，轮胎消耗的能量可以用轮跳速度和非簧载质量速度的差，即轮胎形变速度来衡量。

笔者在处理控制目标时，权衡各性能的制约关系，对目标函数归一化、量纲化处理。

基于上述分析，为了改善乘坐舒适性并且尽可能回收能量，目标函数可选择如下：

(1) 选择车身的垂向加速度 \ddot{x}_s 为最小化性能，优化乘坐舒适性，设 z_1 为馈能悬架系统输出

$$z_1 = \ddot{x}_s \quad (4.1)$$

(2) 选择车身的垂向加速度 \ddot{x}_s 、轮胎的形变速度 $\dot{x}_u - \dot{x}_g$ 为最小化性能，这样既能优化乘坐舒适性，又能减少内部能量消耗，提升馈能效果，设 z_2 为馈能悬架系统输出

$$z_2 = \begin{bmatrix} \ddot{x}_s \\ \dot{x}_u - \dot{x}_g \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

(3) 为了提高乘坐舒适性，馈能悬架减震器需要提供较大的作动力来抵抗由路面不平造成的振动，作动力增大会导致作动器消耗电流偏高，这显然不利于能量

回收。因此，选择车身的垂向加速度 \ddot{x}_s 、减震器电流 I 和轮胎的形变速度 $\dot{x}_u - \dot{x}_g$ 为最小化性能，设 z_3 为馈能悬架系统输出

$$z_3 = \begin{bmatrix} \ddot{x}_s \\ I \\ \dot{x}_u - \dot{x}_g \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

针对上述性能指标，考虑如下的时域硬约束：

(1) 轮胎动载荷不能超过静载荷，即

$$\left| \frac{k_t(x_u - x_g)}{(m_s + m_u)g} \right| \leq 1 \quad (4.4)$$

其中 g 为重力加速度， $g = 9.81m/s^2$ ；

(2) 悬架动行程要限制在一定范围内，以避免撞击限位块。其中限位块最大距离设为 h_{\max} ，则

$$\frac{|x_s - x_u|}{h_{\max}} \leq 1 \quad (4.5)$$

(3) 考虑减震器饱和，设减震器输出作动力的最大值为 u_{\max} ，减震器输出的实际值为 u ，则

$$\left| \frac{u}{u_{\max}} \right| \leq 1 \quad (4.6)$$

综上所述，定义馈能悬架的约束输出 z_4 如下

$$z_4 = \begin{bmatrix} \frac{x_s - x_u}{h_{\max}} \\ \frac{k_t(x_u - x_g)}{(m_s + m_u)g} \\ \frac{u}{u_{\max}} \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

4.1.2 控制结构

单一的控制算法难以满足悬架系统的性能要求，本文针对馈能悬架设计了双层控制结构。上层控制器是悬架系统控制器，输出执行电机所需的理想电流，本文分别设计了五个上层控制器，包括基于遗传算法的LQR控制器、 H_∞ 广义 H_2 状态反馈控制器、基于扩展LMI的 H_∞ 广义 H_2 状态反馈控制器、 H_∞ 广义 H_2 输出反馈控制器、基于扩展LMI的 H_∞ 广义 H_2 输出反馈控制器。下层是跟踪控制器，实现对理想电流的跟踪，本文下层采用PI控制。馈能悬架系统控制结构如图4.1所示。

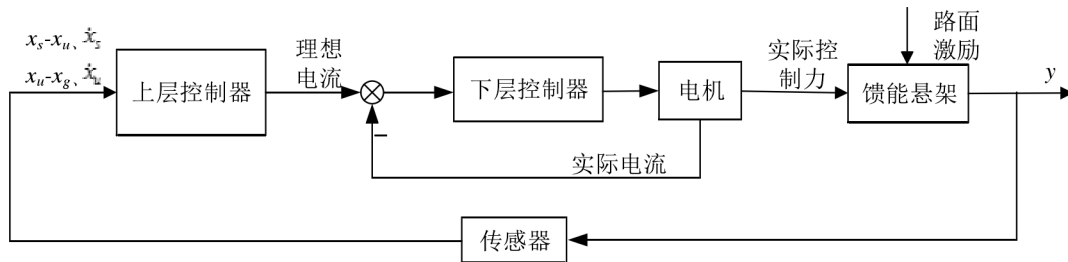


图4.1 馈能悬架系统控制结构图

4.2 基于遗传算法的 LQR 控制器设计

4.2.1 遗传算法

遗传算法是一种进化算法，其基本原理是仿效生物界中的“物竞天择、适者生存”的演化法则。遗传算法是把问题参数编码为染色体，再利用迭代的方式进行选择、交叉以及变异等运算来交换种群染色体的信息。

4.2.1.1 遗传算法的基本概念

GA的概念是从生物的不断进化衍生的，具体过程是模仿大自然环境和生物的DNA遗传规则，逐渐演化为一种初始和进化特征的全局优化算法。GA以各种数制编码后的新群体代替所研究问题中的原生群体，以适应度函数为进化规则，将群体先进行编码，编码过程后等价于遗传基因的进化过程，加入随机交叉、重组、变异等种群进化的元素，使整个群体向着最优解靠近^[37]。

为了能够将GA与优化问题联系起来，通常，我们可以用如下的式子进行表述

$$\begin{aligned} \max_{x \in D} f(x) \\ \text{s.t. } g(x) \geq 0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

其中， $f(x)$ 为目标函数， $g(x)$ 为约束条件， D 为求解区域^{[38][39]}。

4.2.1.2 遗传算法的步骤

下面给出一般的遗传算法流程

Step 1 对问题解做一种编码，给出一个有 N 个染色体的初始种群

$$\text{pop}(1), t=1$$

Step 2 对 $\text{pop}(t)$ 中的每一个染色体，计算它的适应值

$$f_i = f(\text{pop}(t)_i)$$

Step 3 若停止规则满足，则算法停止；否则，计算概率

$$p_i = \frac{f_i}{\sum_{j=1}^N f_j} \quad (i=1, 2, \dots, N)$$

并依此概率分布从 $\text{pop}(t)$ 中随机地选 N 个染色体构成一个新种群

$$newpop(t+1) = \{pop(t)_i, i = 1, 2, \dots, N\};$$

Step 4 通过杂交, 杂交概率为选定的 p_c , 得到一个有 N 个染色体的 $crosspop(t+1)$;

Step 5 以一个较小的概率 p_m , 使得一个染色体的一个基因发生变异, 形成 $mutpop(t+1)$;

$t := t+1, pop(t) := mutpop(t)$; 返回到 Step 2

4.2.2 LQR 控制

设线性时不变系统的状态方程为

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (4.9)$$

引入最优控制的性能指标, 即设计一个输入 u , 使得

$$J = \frac{1}{2} x^T S x + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [x^T Q x + u^T R u] dt \quad (4.10)$$

最小。

其中, Q 和 R 分别代表状态变量和输入变量的权值矩阵; t_f 代表控制过程的结束时间。矩阵 S 代表控制系统中的约束条件矩阵, 我们称这样的控制问题为线性二次型最优控制问题。

最优控制理论中, 可以通过变分法来求得控制信号的解, 以此想获得 J 的最小值, 即

$$u^* = -R^{-1} B^T P x \quad (4.11)$$

其中, P 为对称矩阵, 该矩阵满足黎卡提微分方程:

$$\dot{P} = -PA - A^T P + PBR^{-1}B^T P - Q \quad (4.12)$$

由此可知, 求解出的控制信号 u^* 取决于状态变量 x 和黎卡提微分方程的解 P 。

一般我们不会直接求解黎卡提微分方程, 这是由于微分方程设计的控制器非线性项无法求解, 所以我们就分析终止条件, 也就是 t_f 趋于无穷时。在稳态时, 假设结束时间 t_f 趋近于无穷, 这样会使系统的状态渐进地趋近于 0。黎卡提微分方程的解 P 趋近于常数矩阵, 即 $\dot{P} = 0$ 。此时, 黎卡提微分方程可以简化为

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (4.13)$$

上面的方程就是经典的黎卡提代数方程, 对应的控制问题被称为线性二次型最优调节问题。 $u^* = Kx$, 其中, K 为状态反馈矩阵, $K = R^{-1}B^T P$, 则可以得出在状态反馈下的闭环系统的状态方程矩阵为 $(A - BK, B, C - DK, D)$ 。

4.2.3 基于遗传算法的 LQR 控制器设计

从最优控制律可以看出, 最优性取决于 Q 、 R 的取值, 然而这两个矩阵并没有确定的解析方法, 只能凭经验去选择参数, 这时, 遗传算法就起到了作用。

遗传算法在计算过程中使用自然淘汰法则，仿效生物基因中的基因链交叉、基因变异等，使得被求解范围内的数不断地变化，向着最优解靠近。由于传统的 LQR 控制算法依靠经验来确定权值，这就导致了求取结果的偶然性，GA 算法存在一定的早熟情况影响最优解求取。但是，GA 拥有搜索全局最优解的能力，在一定程度上，优化了 LQR 控制算法中的权值，使得 LQR 的求取结果得到改良。

设馈能悬架状态方程如下

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Gw \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (4.14)$$

悬架模型前文已给出，则

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -\frac{k_s}{m_s} & -\frac{c_s}{m_s} & 0 & \frac{c_s}{m_s} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_s}{m_u} & \frac{c_s}{m_u} & -\frac{k_u}{m_u} & -\frac{c_s}{m_u} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{m_s} & 0 & -\frac{1}{m_u} \end{bmatrix}^T, C = \begin{bmatrix} -\frac{k_s}{m_s} & -\frac{c_s}{m_s} & 0 & \frac{c_s}{m_s} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} -\frac{1}{m_s} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T$$

评价馈能悬架性能的指标包括：代表乘坐舒适性的车身垂向加速度，影响车身姿态与结构的悬架动行程，代表操纵稳定性的轮胎动位移。除此以外，还要考虑可回收能量的问题。此处，笔者考虑到影响悬架能量耗散的因素，并作出分析：当路面激励作用到车身时，悬架的总能量包含四部分：车辆动能变化量、弹性元件吸收能量、轮胎耗散能量和悬架吸收的能量。悬架吸收的能量又可以细化为如图4.2所示的形式。

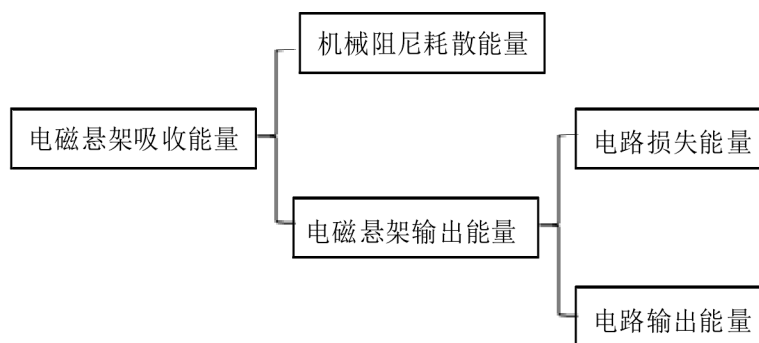


图4.2 悬架吸收能量流向

由此可知，车辆动能变化量、弹性元件吸收能量、轮胎耗散能量是对能量损耗的三个主要因素，从以上三点着手，可以提高悬架的馈能潜能。将车辆动能变化量以及弹性元件吸收能量归结为一个整体，当悬架提供的作动力较大时，车辆动能变化量以及弹性元件吸收能量会相对变小，但是这样做的同时也增大了耗能。

其次，轮胎耗散能量可以通过减小轮跳速度和非簧载质量速度的差来降低。对于馈能悬架来说，动力学性能越接近被动悬架，馈能效果越好，因为对悬架振动的制约减少了，簧载质量和非簧载质量的相对速度会变大，这正好提高了馈能回收。但是，馈能悬架既要保持一定的乘坐舒适性，同时也要兼顾能量回收，在进行基于遗传算法的LQR控制器设计时，就要考虑到关于权重矩阵Q的择优规则。评价悬架性能的指标包括：代表乘坐舒适性的车身垂向加速度 \ddot{x}_s ，影响车身姿态且与结构设计有关的悬架动行程 $x_s - x_u$ ，代表操纵稳定性的轮胎动位移 $x_u - x_g$

$$J = \int_0^{\infty} [q_1(x_s - x_u)^2 + q_2(x_u - x_g)^2 + q_3\ddot{x}_s^2] dt \quad (4.15)$$

将 $\dot{x} = Ax + Bu + Gw$ 带入式(4.2.8)，有

$$J = \int_0^{\infty} [x^T Qx + u^T Ru + 2x^T Nu] dt \quad (4.16)$$

则控制输入量的加权矩阵为^[40]

$$Q = C^T qC, R = D^T qD, N = C^T qD$$

其中：

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 + \frac{K_s^2}{m_u^2} & -q_2 - \frac{K_s^2}{m_u^2} & 0 \\ 0 & -q_2 - \frac{K_s^2}{m_u^2} & q_1 + q_2 + \frac{K_s^2}{m_u^2} & -q_1 \\ 0 & 0 & -q_1 & q_1 \end{bmatrix}, \quad R = \frac{1}{m_u^2}, \quad N = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{K_s}{m_u^2} \\ \frac{K_s}{m_u^2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

由于性能指标的单位以及数量级不同，因此，我们要做量纲化处理，即在设计适应度函数时，要将馈能悬架的动力学性能除以同单位级的被动悬架的动力学性能指标。

设该适应度函数为 L ，则优化问题可描述如下

$$\min L = \frac{BA(X)}{BA_{pas}} + \frac{SWS(X)}{SWS_{pas}} + \frac{DTD(X)}{DTD_{pas}}$$

$$X = (q_1, q_2, q_3), 0.1 < X_i < 10^6$$

$$s.t. \begin{cases} BA < BA_{pas} \\ SWS < SWS_{pas} \\ DTD < DTD_{pas} \end{cases}$$

其中 BA 、 SWS 、 DTD 分别代表车身垂向加速度、悬架动行程和轮胎动位移的均方根值； BA_{pas} 、 SWS_{pas} 、 DTD_{pas} 分别代表被动悬架的相应性能，除悬架弹性模量和阻尼系数分别为 K_{spas} 、 C_{spas} 外，其他条件与馈能悬架相同；优化变量 X 为加权系数 q_1 、 q_2 、 q_3 。

在处理约束时，笔者做如下设计：在仿真过程中，会获得许多组的权值矩阵 X ，在由式计算得到一组的适应度函数值后，系统会判断这组值是否全都满足要求。如果没问题，则适应度函数值就是系统求出的这个结果；如果有问题，为了避开这个没有满足要求的适应度函数值，系统就会在求解出的适应度函数值后面加上10，让这个结果远离其它合理的数值，这样就规范了整个数组向满足要求的方向计算。

基于遗传算法的LQR控制器加权系数优化过程示意图如图4.3所示，具体如下：

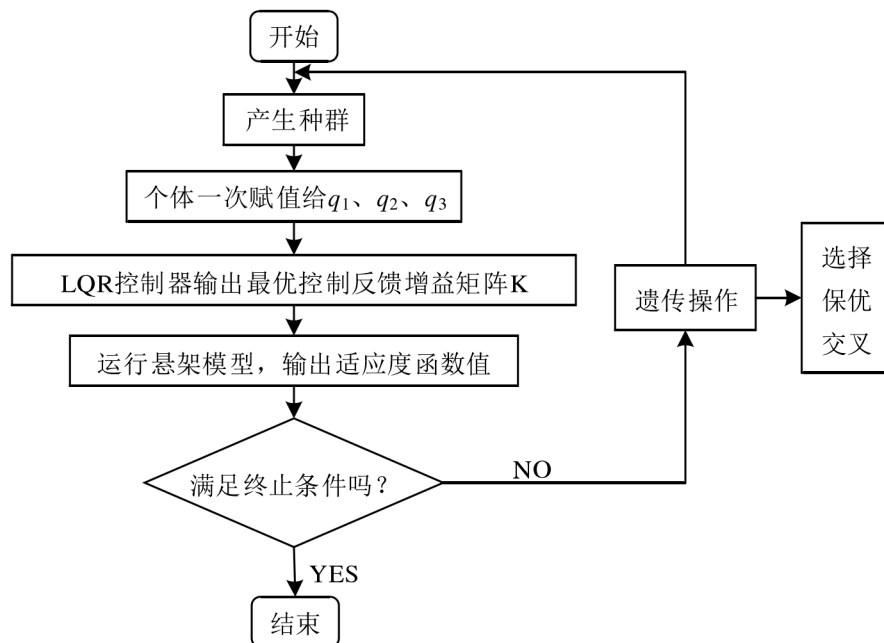


图4.3 基于遗传算法的LQR控制器优化流程

4.3 状态反馈控制器设计

4.3.1 H_∞ /广义 H_2 状态反馈控制

根据上述控制问题描述以及悬架运动学模型，考虑线性时不变系统：

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u \\ z_1 = C_1 x + D_{11} w + D_{12} u \\ z_4 = C_4 x + D_{41} w + D_{42} u \end{cases} \quad (4.17)$$

设计一个内部稳定的控制器，使其对于被控对象组成的闭环系统从干扰 $w(t)$ 到性能输出 $z_1(t)$ 的传递函数的 H_∞ 范数最小，同时约束输出 $z_4(t)$ 满足时域硬约束。式中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -\frac{k_s}{m_s} & -\frac{c_s}{m_s} & 0 & \frac{c_s}{m_s} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_s}{m_s} & \frac{c_s}{m_s} & -\frac{k_u}{m_u} & -\frac{c_s}{m_u} \end{bmatrix}, \quad B_1 = [0 \ 0 \ -1 \ 0]^T, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{m_s} & 0 & -\frac{1}{m_u} \end{bmatrix}^T$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} -\frac{k_s}{m_s} & -\frac{c_s}{m_s} & 0 & \frac{c_s}{m_s} \end{bmatrix}, \quad D_{11} = 0, \quad C_4 = \begin{bmatrix} \frac{1}{h_{\max}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{k_u}{9.81 \times (m_s + m_u)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D_{41} = [0 \ 0 \ 0]^T, \quad D_{42} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \ 0 \ \frac{1}{u_{\max}} \end{bmatrix}^T$$

同理，当性能输出为 $z_2(t)$ 、 $z_3(t)$ 时，相应的线性时不变系统形式与式(4.17)相同，如下：

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u \\ z_2 = C_2 x + D_{21} w + D_{22} u \\ z_4 = C_4 x + D_{41} w + D_{42} u \end{cases} \quad (4.18)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u \\ z_3 = C_3 x + D_{31} w + D_{32} u \\ z_4 = C_4 x + D_{41} w + D_{42} u \end{cases} \quad (4.19)$$

相应的系数只在 H_∞ 性能异同

$$C_2 = \begin{bmatrix} -\frac{k_s}{m_s} & -\frac{c_s}{m_s} & 0 & \frac{c_s}{m_s} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_{21} = [0 \ -1]^T, \quad D_{22} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m_s} & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$C_3 = \begin{bmatrix} -\frac{k_s}{m_s} & -\frac{c_s}{m_s} & 0 & \frac{c_s}{m_s} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{31} = [0 \ -1 \ 0]^T, \quad D_{32} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m_s} & 0 & \frac{1}{\varphi} \end{bmatrix}^T$$

依据上述控制器设计规则，为获得最优控制律，对系统应用引理2和引理3，即求解如下半定规划问题：

$$\min \gamma$$

$$\begin{bmatrix} AQ + BY + (AQ + BY)^T & B_1 & (C_1Q + D_{12}Y)^T \\ B_1^T & -I & D_{11}^T \\ C_1Q + D_{12}Y & D_{11} & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0, \quad (4.20)$$

$$\begin{bmatrix} Q & QC_2^T + Y^T D_{22}^T \\ (QC_2^T + Y^T D_{22}^T)^T & \rho^2 I \end{bmatrix} > 0. \quad (4.21)$$

设该控制器求解出的最优解为 (γ^*, Q^*, Y^*) ，最优控制律为 K_1 ， $K_1 = Y^*(Q^*)^{-1}$ ，由 K_1 组成的闭环系统即满足设计要求。

4.3.2 基于扩展 LMI 法状态反馈控制

对于线性矩阵不等式，常见的问题就是求得性能的保守性问题^{[41][42][44][45]}：用来检验系统性能的李雅普诺夫函数包含在控制变量当中，即对于目标函数和约束条件都用了相同的李雅普诺夫矩阵。

前文已述S-procedure理论，除了可以将非凸优化问题转化为凸优化问题外，通过S-procedure理论中的矩阵变换方法还可以引入松弛变量，解耦 H_∞ /广义 H_2 状态反馈控制中的李雅普诺夫矩阵。

将控制器 $u = K_1 x$ 代入式(4.18)，则式(4.18)可变换为：

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_{cl}x + B_1 w \\ z_1 &= C_{1,cl}x + D_{11}w \\ z_4 &= C_{4,cl}x + D_{41}w \end{aligned} \quad (4.22)$$

对式(4.20)引入引理6、引理7，则式(4.20)可变换为：

$$\begin{bmatrix} -[F]_s & (A_{cl}^T F + P)^T & F^T B_1 & F^T & 0 \\ A_{cl}^T F + P & -P & 0 & 0 & C_{1,cl}^T \\ B_1^T F & 0 & -I & 0 & D_{11}^T \\ F & 0 & 0 & -P & 0 \\ 0 & C_{1,cl} & D_{11} & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0, \quad (4.23)$$

其中 F 代表一般矩阵。

由于扩展 LMI 法引入了松弛变量，导致 H_2 的李雅普诺夫矩阵异同，所以在处理广义 H_2 约束时，原状态反馈中的 H_∞ 性能与广义 H_2 性能内蕴的部分要重新证明。

与式(4.20)变换到(4.23)的方法相同，扩展 LMI 下的广义 H_2 约束，即式(4.21)可变换为：

$$\begin{bmatrix} -[F]_s & F^T A_{cl} + P_1 & F^T B_1 & F^T \\ (F^T A_{cl} + P_1)^T & -P_1 & 0 & 0 \\ (F^T B_1)^T & 0 & -I & 0 \\ F & 0 & 0 & -P_1 \end{bmatrix} < 0, \quad (4.24)$$

状态反馈控制中，由于 H_∞ 性能与广义 H_2 性能的LMI表达式存在相同部分，在引

入引理6、引理7后，对两者的里李普诺夫矩阵解耦时， H_∞ 性能与广义 H_2 性能的LMI表达式内蕴部分也要进行扩维处理，则可获得如下线性矩阵不等式组（此处不进行展开赘述，展开式见后文）

$$\begin{bmatrix} -[F]_s & (A_{cl}^T F + P)^T & F^T B_1 & F^T & 0 \\ A_{cl}^T F + P & -P & 0 & 0 & C_{1,cl}^T \\ B_1^T F & 0 & -I & 0 & D_{11}^T \\ F & 0 & 0 & -P & 0 \\ 0 & C_{1,cl} & D_{11} & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0, \quad (4.25)$$

$$\begin{bmatrix} -[F]_s & F^T A_{cl} + \bar{P}_1 & F^T B_1 & F^T \\ (F^T A_{cl} + \bar{P}_1)^T & -\bar{P}_1 & 0 & 0 \\ B_1^T F & 0 & -I & 0 \\ F & 0 & 0 & -\bar{P}_1 \end{bmatrix} < 0, \quad (4.26)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{P}_1 & F^T C_4^T + Y^T D_{42}^T \\ C_4 F + D_{42} Y & \rho^2 I \end{bmatrix} > 0. \quad (4.27)$$

求解上述线性矩阵不等式组则可获得降低保守性后的状态反馈控制的最优控制律。

4.4 输出反馈控制器设计

在实际应用中，我们很难通过传感器去测得一些悬架的数据，所以本文考虑用输出反馈控制去设计控制器^{[46][47][48][49][50]}。

4.4.1 H_∞ /广义 H_2 输出反馈控制

系统的输出反馈控制器具有如下形式

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= A_k \xi + B_k y \\ u &= C_k \xi + D_k y \\ y &= Cx + D_1 w + D_2 u \end{aligned} \quad (4.28)$$

将输出反馈控制器带入系统，则可以得到

$$\begin{aligned} \dot{x}_{cl} &= A_{cl} x_{cl} + B_{cl} w \\ z_1 &= C_{1,cl} x_{cl} + D_{1,cl} w \\ z_4 &= C_{4,cl} x_{cl} + D_{4,cl} w \end{aligned} \quad (4.29)$$

上式中

$$\begin{aligned} x_{cl} &= [x^T, \xi^T]^T \\ A_{cl} &= \begin{bmatrix} A + B_2 D_k C & B_2 C_k \\ B_k C & A_k \end{bmatrix} & B_{cl} &= \begin{bmatrix} B_1 + B_2 D_k D_{41} \\ B_k D_{41} \end{bmatrix} \\ C_{1,cl} &= [C_1 + D_{12} D_k C \quad D_{12} C_k] & C_{4,cl} &= [C_4 + D_{42} D_k C \quad D_{42} C_k] \\ D_{1,cl} &= D_{11} + D_{12} D_k D_1 & D_{4,cl} &= D_{41} + D_{42} D_k D_1 \end{aligned}$$

对式(3.5)引入引理2, 输出反馈的 H_∞ 性能如下所示:

$$\begin{bmatrix} A_{cl}^T P + (A_{cl}^T P)^T & PB_{cl} & C_{1,cl}^T \\ (PB_{cl})^T & -I & D_{1,cl}^T \\ C_{1,cl} & D_{1,cl} & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0, \quad (4.30)$$

将 P 和 P^{-1} 分解为

$$P = \begin{bmatrix} Y & N \\ N^T & * \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} X & M \\ M^T & * \end{bmatrix}$$

其中 X 和 Y 是 $n \times n$ 的对称正定矩阵, *表示任意矩阵块。设

$$F_1 = \begin{bmatrix} X & I \\ M^T & * \end{bmatrix}, \quad F_2 = \begin{bmatrix} I & Y \\ * & N^T \end{bmatrix}$$

不难推出 $PF_1 = F_2$, 则

$$\begin{aligned} \hat{A} &= NA_k M^T + NB_k CX + YB_2 C_k M^T + Y(A + B_2 D_k C)X \\ \hat{B} &= NB_k + YB_2 D_k \\ \hat{C} &= C_k M^T + D_k CX \\ \hat{D} &= D_k \end{aligned}$$

将系数矩阵 A_{cl} , B_{cl} , $C_{i,cl}$, $D_{i,cl}$ 带入式(4.5.3)中, 可得到下式

$$\begin{bmatrix} [AX + B_2 \hat{C}]_s & \hat{A} + A + B_2 \hat{D}C & B_1 + B_2 \hat{D}D_1 & [C_1 X + D_2 \hat{C}]^T \\ (\hat{A} + A + B_2 \hat{D}C)^T & [A^T Y + \hat{B}C]_s & YB_1 + \hat{B}D_1 & [C_1 + D_{12} \hat{D}C]^T \\ (B_1 + B_2 \hat{D}D_1)^T & (YB_1 + \hat{B}D_1)^T & -I & [D_{11} + D_{12} \hat{D}D_1]^T \\ C_1 X + D_2 \hat{C} & C_1 + D_{12} \hat{D}C & D_{11} + D_{12} \hat{D}D_1 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0, \quad (4.31)$$

同理, 输出反馈的广义 H_2 性能LMI描述可写成如下形式

$$\begin{bmatrix} X & I & (C_4 X + D_2 \hat{C})^T \\ I & Y & (C_4 + D_2 \hat{D}C)^T \\ C_4 X + D_2 \hat{C} & C_4 + D_2 \hat{D}C & -\rho^2 I \end{bmatrix} > 0, \quad (4.32)$$

$$D_{41} + D_{42} \hat{D}D_1 = 0. \quad (4.33)$$

由于 $\begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} = F_2^T P F_2$, 且 $P > 0$, F_2 为列满秩矩阵, 所以有

$$\begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} > 0, \quad (4.34)$$

根据 $PP^{-1} = I$, 可得

$$MN^T = I - XY. \quad (4.35)$$

因此, 可以通过矩阵 $I - XY$ 的奇异值分解来求得矩阵 M 和 N , 控制器参数

即可通过下式求得:

$$\begin{aligned} D_k &= \hat{D} \\ C_k &= (\hat{C} - D_k C X)(M^T)^{-1} \\ B_k &= N^{-1}(\hat{B} - Y B_2 D_k) \\ A_k &= N^{-1}[\hat{A} - Y(A + B_2 D_k C)X](M^T)^{-1} - B_k C X (M^T)^{-1} - N^{-1} Y B_2 C_k \end{aligned}$$

4.4.2 基于扩展 LMI 法输出反馈控制

根据引理6和引理7, 式(4.30)可转换为

$$\begin{bmatrix} -[F]_s & (A_{cl}^T F + P)^T & F^T B_{cl} & F^T & 0 \\ A_{cl}^T F + P & -P & 0 & 0 & C_{cl}^T \\ B_{cl}^T F & 0 & -I & 0 & -D^T \\ F & 0 & 0 & -P & 0 \\ 0 & C_{cl} & D & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0, \quad (4.36)$$

通过计算可以发现(4.36)存在高阶非线性项, 为了处理上述矩阵不等式中的非线性项, 采用变量替换法来简化非线性项, 设

$$F = \begin{bmatrix} X & Y \\ U & V \end{bmatrix}, \quad F_1 = \begin{bmatrix} M & I \\ H & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{则有 } F_2 = \begin{bmatrix} 1 & X \\ 0 & U \end{bmatrix}, \quad F \cdot F_1 = F_2$$

且

$$\begin{aligned} A_{cl} &= \begin{bmatrix} A + B_2 D_k C_3 & B_2 C_k \\ B_k C_3 & A_k \end{bmatrix} & B_{cl} &= \begin{bmatrix} B_1 + B_2 D_k D_{41} \\ B_k D_{41} \end{bmatrix} \\ C_{1,cl} &= [C_1 + D_{12} D_k C \quad D_{12} C_k] & C_{2,cl} &= [C_4 + D_{42} D_k C \quad D_{42} C_k] \\ D_{1,cl} &= D_{11} + D_{12} D_k D_1 & D_{2,cl} &= D_{41} + D_{42} D_k D_1 \end{aligned}$$

对式(4.36)左乘 $\text{diag}[F_1^T \quad F_1^T \quad 1 \quad F_1^T]$, 右乘 $\text{diag}[F_1^T \quad F_1^T \quad 1 \quad F_1^T]$, 可得到下式

$$\begin{bmatrix} -F_1^T [F]_s F_1 & (F_1^T A_{cl}^T F F_1 + F_1^T P F_1)^T & (B_{cl}^T F F_1)^T & F_1^T F^T F_1 & 0 \\ F_1^T A_{cl}^T F F_1 + F_1^T P F_1 & -F_1^T P F_1 & 0 & 0 & (C_{1,cl} F_1)^T \\ B_{cl}^T F F_1 & 0 & -I & 0 & D_{1,cl}^T \\ F_1^T F F_1 & 0 & 0 & -F_1^T P F_1 & 0 \\ 0 & C_{1,cl} F_1 & D_{1,cl} & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0, \quad (4.37)$$

$$\text{设 } \bar{W} = F_1^T [F]_s F_1 = \begin{bmatrix} -[M]_s & -1 - M^T X - H^T U \\ -1 - X^T M - U^T H & -[X]_s \end{bmatrix}, \quad \bar{P} = \begin{bmatrix} R^T & N \\ N^T & S^T \end{bmatrix} > 0$$

$$\bar{C} = C_{1,cl} F_1, \quad \bar{B} = B_{cl}^T F F_1, \quad \bar{A} = F_1^T A_{cl}^T F F_1, \quad Z = X^T M + U^T H$$

则式(4.37)可变换为

$$\begin{bmatrix} -[\bar{W}]_s & (\bar{A} + \bar{P})^T & \bar{B}^T & \bar{W}^T & 0 \\ \bar{A} + \bar{P} & -\bar{P} & 0 & 0 & \bar{C}^T \\ \bar{B} & 0 & -I & 0 & 0 \\ \bar{W} & 0 & 0 & -\bar{P} & 0 \\ 0 & \bar{C} & 0 & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0, \quad (4.38)$$

至此，为方便表述，设

$$a = (A_k H)^T U + (B_k C M)^T U + (B_2 C_k H)^T X + (A M + B_2 D_k C M)^T X$$

$$b = D_k^T B_2^T X + B_k^T U$$

$$c = H^T C_k^T + M^T C^T D_k^T$$

$$d = D_k$$

式(4.38)可变换为

$$\begin{bmatrix} -[X]_s & -Z^T - I & X^T A + b C + R & a + N & X^T B_1 & X & I & 0 \\ -Z - I & -[M]_s & A + B_2 d + N^T & A M + B_2 C + S & B_1 & Z & M^T & 0 \\ (X^T A + b C + R)^T & (A + B_2 d + N^T)^T & -R & -N & 0 & 0 & 0 & C_1^T + C^T d^T D_{12}^T \\ (a + N)^T & (A M + B_2 C + S)^T & -N^T & -S & 0 & 0 & 0 & M^T C_1^T + c^T D_{12}^T \\ B_1^T X & B_1^T & 0 & 0 & -I & 0 & 0 & 0 \\ X^T & Z^T & 0 & 0 & 0 & -R & -N & 0 \\ I & M & 0 & 0 & 0 & -N^T & -S & 0 \\ 0 & 0 & (C_1^T + C^T d^T D_{12}^T)^T & (M^T C_1^T + c^T D_{12}^T)^T & 0 & 0 & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0, \quad (4.39)$$

对于引入扩展LMI法后的广义 H_2 性能，其LMI表述形式与式(4.31)相同，对式(4.31)引入引理6，引理7，式(4.4.5)可变换为

$$\begin{bmatrix} -[F]_s & F^T A_{cl} + F_2^T P_1 & F^T B_{cl} & F^T \\ (F^T A_{cl} + P_1)^T & -P_1 & 0 & 0 \\ B_{cl}^T F & 0 & -I & 0 \\ F & 0 & 0 & -P_1 \end{bmatrix} < 0, \quad (4.40)$$

$$\begin{bmatrix} P_1 & C_{2,cl}^T \\ C_{2,cl} & \rho^2 I \end{bmatrix} > 0, \quad (4.41)$$

这里， H_∞ 性能与广义 H_2 性能的李雅普诺夫矩阵解耦，对式(4.40)进行合同变换，左乘 $\text{diag}[F_1^T \quad F_1^T \quad 1 \quad F_1^T]$ ，右乘 $\text{diag}[F_1 \quad F_1 \quad 1 \quad F_1]$ ，可得下式：

$$\begin{bmatrix} -F_1^T [F]_s F_1 & F_1^T F^T A_{cl} F_1 + F_1^T P_1 F_1 & F^T B_{cl} & F^T \\ (F_1^T F^T A_{cl} F_1 + F_1^T P_1 F_1)^T & -F_1^T P_1 F_1 & 0 & 0 \\ B_{cl}^T F & 0 & -I & 0 \\ F & 0 & 0 & -F_1^T P_1 F_1 \end{bmatrix} < 0, \quad (4.42)$$

引入扩展LMI的广义 H_2 性能展开形式与(4.39)展开方式相同, 并将

$\bar{P}_1 = F_1^T P_1 F_1 = \begin{bmatrix} R' & N' \\ N'^T & S' \end{bmatrix} > 0$ 带入式(4.40), 可得下式:

$$\begin{bmatrix} -[X]_s & -Z^T - I & X^T A + bC + R' & a + N' & X^T B_1 & X & I \\ -Z - I & -[M]_s & A + B_2 d + N'^T & AM + B_2 C + S' & B_1 & Z & M^T \\ (X^T A + bC + R')^T & (A + B_2 d + N'^T)^T & -R' & -N' & 0 & 0 & 0 \\ (a + N')^T & (AM + B_2 C + S')^T & -N'^T & -S' & 0 & 0 & 0 \\ B_1^T X & B_1^T & 0 & 0 & -I & 0 & 0 \\ X^T & Z^T & 0 & 0 & 0 & -R' & -N' \\ I & M & 0 & 0 & 0 & -N^T & -S' \end{bmatrix} < 0, \quad (4.43)$$

引入扩展LMI法后的输出反馈控制线性矩阵不等式组如下:

$$\begin{bmatrix} -F_1^T [F]_s F_1 & (F_1^T A_d^T F F_1 + F_1^T P F_1)^T & (B_d^T F F_1)^T & F_1^T F^T F_1 & 0 \\ F_1^T A_d^T F F_1 + F_1^T P F_1 & -F_1^T P F_1 & 0 & 0 & (C_{1,d} F_1)^T \\ B_d^T F F_1 & 0 & -I & 0 & D_{1,d}^T \\ F_1^T F F_1 & 0 & 0 & -F_1^T P F_1 & 0 \\ 0 & C_{1,d} F_1 & D_{1,d} & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0, \quad (4.44)$$

$$\begin{bmatrix} -F_1^T [F]_s F_1 & F_1^T F^T A_d F_1 + F_1^T P_1 F_1 & F^T B_d & F^T \\ (F_1^T F^T A_d F_1 + F_1^T P_1 F_1)^T & -F_1^T P_1 F_1 & 0 & 0 \\ B_d^T F & 0 & -I & 0 \\ F & 0 & 0 & -F_1^T P_1 F_1 \end{bmatrix} < 0, \quad (4.45)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{P}_1 & \bar{C}_4^T \\ \bar{C}_4 & \rho^2 I \end{bmatrix} > 0, \quad (4.46)$$

$$\bar{P}_1 = F_2^T P_1 F_2 = \begin{bmatrix} R' & N' \\ N'^T & S' \end{bmatrix} > 0, \quad (4.47)$$

根据 $Z - X^T M = U^T H$ 寻找非奇异 X 和 M , 并对 $U^T H$ 进行奇异值分解, 获得接近最优解, 但不饱和的一组 X 、 M 、 U 、 H , 控制器求解如下

$$A_k = H^{-T} [a - M^T (A + B_2 D_k C)^T X - H^T (B_2 C_k)^T X - M^T (B_k C)^T U] U^{-1}$$

$$B_k = H^{-T} (b - M^T B_2 D_k)$$

$$C_k = (c - D_k C X) U^{-1}$$

$$D_k = d$$

4.5 跟踪控制器设计

执行电机的等效电路如图4.4所示。其中 R 为电路总电阻, L 为电路总电感, I 为电路总电流, E 为电机反电动势, U 为电源电压。

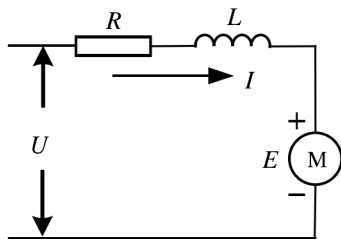


图4.4 电机等效电路

通过上层控制器获得的控制输出是执行机构所需的理想电流值^{[51][52][53]}，执行机构接收上层控制器送来的控制信号需要另外设计控制器来使得执行机构的输出跟踪上控制器输出的理想值。本文采用采用上下级串级控制方案，下层采用 PI 控制器^[54]来实现执行电机的输出对上层控制器输出电流(理想值)的跟踪。PI 控制器能够快速减少实际电流与理想电流的偏差，实现执行电机对上层输出理想电流的无差跟踪。

根据基尔霍夫定律^[55]，电机等效电路的电压平衡方程可以写为

$$U = RI + E + L \frac{dI}{dt} \quad (4.48)$$

控制器以上层控制器输出的理想电流 I_{ref} 和实际电枢电流 I 的偏差为输入，定义系统偏差为

$$e = I_{ref} - I \quad (4.49)$$

设电枢电压 U 为控制输入，则

$$U = K_p e + K_i \int_0^t e dt \quad (4.50)$$

K_p 为 PI 控制器的比例系数； K_i 为 PI 控制器的积分系数^[56]。结合式(2.2.3)、(4.48)和(4.50)得

$$K_p e + K_i \int_0^t e dt - \phi \dot{z} = RI + L \frac{dI}{dt} \quad (4.51)$$

式(4.51)经过拉氏变换^[57]可得，

$$I(s) = \left[\left(K_p + \frac{K_i}{s} \right) e(s) - \phi \dot{z} \right] \frac{1}{LS + R} \quad (4.52)$$

跟踪控制器设计完毕。跟踪控制框图如图 4.5 所示。

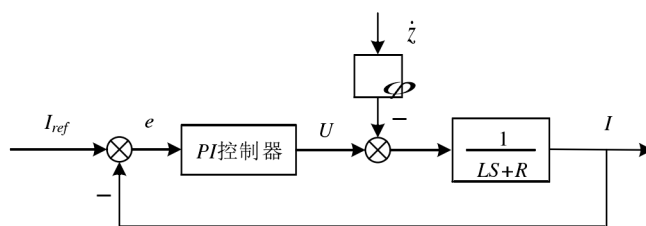


图4.5 下层控制结构图

根据上层控制器输出的理想电流与系统实际电流的偏差作为下层控制器的输入，经过 PI 控制器实现对理想电流的跟踪，电机等效电路中相应元件参数^[68]如表 4.1 所示。下层控制器输出实际电流给执行电机，由式(2.9)可得到作动器电机输送给馈能悬架的实际控制力。

4.6 仿真分析

下面将根据系统控制结构图以及所设计控制器进行Matlab仿真分析，仿真内容包括：扩展线性矩阵不等式法的有效性^{[59] [60] [61]}；不同控制器下，馈能悬架系统的作动力、垂向加速度、悬架动行程、轮胎动位移、作动力饱和程度仿真；PI跟踪控制器的有效性；针对不同控制目标，基于扩展LMI的 H_∞ /广义 H_2 输出反馈控制器的馈能效果。

本文通过确定性路面输入来验证控制器对馈能悬架的动力学性能的影响，前文已给出确定性坑包路面数学模型，下面给出悬架的相关参数^[62]，如表4.1所示

表4.1 仿真参数

名称	单位	数值
簧载质量	<i>Kg</i>	320
非簧载质量	<i>Kg</i>	40
轮胎刚度	<i>N/m</i>	200000
悬架刚度	<i>N/m</i>	18000
悬架阻尼	<i>N/m</i>	1000
限位块最大距离	<i>m</i>	0.08
减震器最大输出	<i>N</i>	1000
等效电路电阻	Ω	10
等效电路电感	<i>H</i>	0.3
电机常数	<i>N/A</i>	90

4.6.1 扩展 LMI 法有效性仿真分析

扩展 LMI 法是基于 S-procedure 处理线性矩阵不等式的方法衍生出的，其本质是通过引入松弛变量，使李雅普诺夫矩阵解耦。为验证其降低保守性的有效性，通过 Matlab 进行了一组状态反馈控制和引入扩展 LMI 法状态控制的 H_∞ 性能对比仿真。

图 4.6 给出了确定性路面坑包输入仿真：

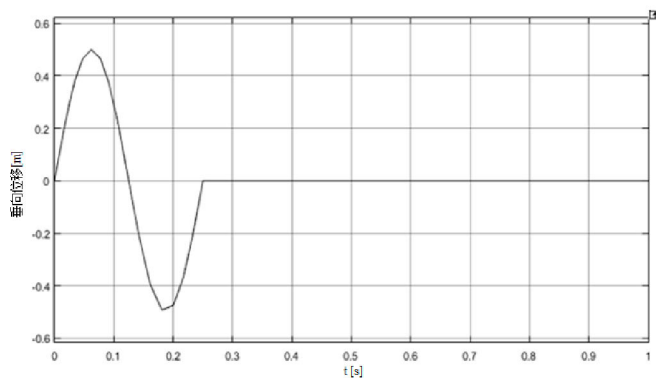


图4.6 坑包模型

当路面扰动为确定性坑包输入，车速为 30m/s，性能输出为 $z_1(t)$ 时，悬架在 H_∞

广义 H_2 状态反馈控制器下的簧载质量垂向加速度如图 4.7 所示

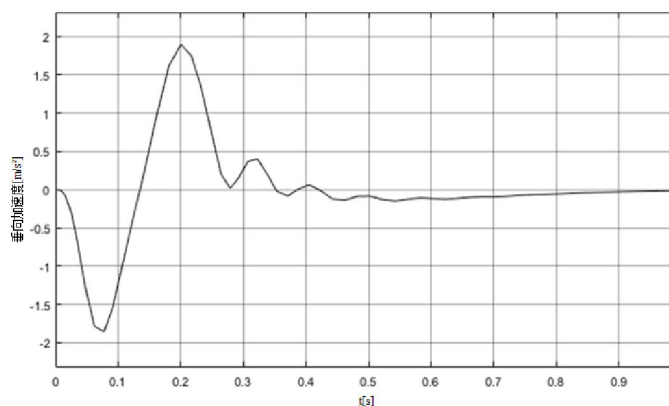


图4.7 垂向加速度

引入扩展 LMI 法后，簧载质量垂向加速度仿真如图 4.8 所示

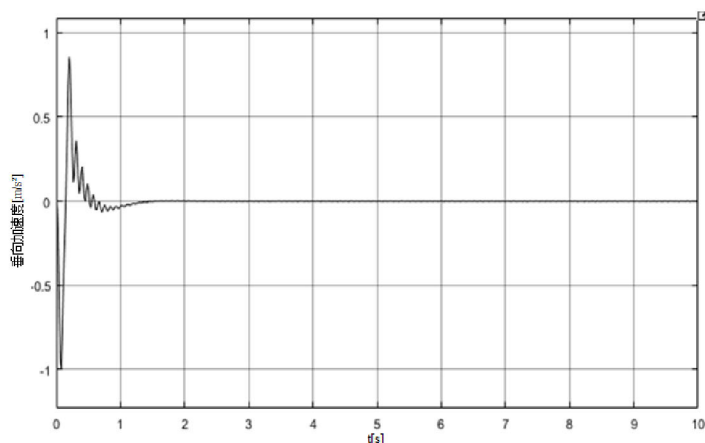


图4.8 垂向加速度

通过对比发现：单纯的状态反馈控制求得的 H_∞ 性能为 0.4870，引入扩展 LMI 法后求得的 H_∞ 性能为 1.4936，实际上并没有降低 H_∞ 性能的保守性。这是由于状态反馈控制引入扩展 LMI 法后，虽然解耦了状态反馈控制中的李雅普诺夫矩阵，但是降低了广义 H_2 性能的保守性。这里，存在一个相对性问题，参考文献

[63][64][65], 可以得到如下 H_∞ 性能和广义 H_2 性能的关系如图 4.9:

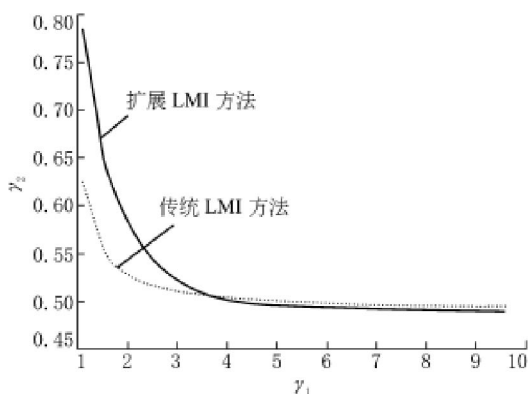


图4.9 H_∞ 性能和广义 H_2 性能对比

因此, 本文对比了状态反馈和引入扩展 LMI 的状态反馈广义 H_2 性能, 即悬架动行程比、动静载荷比和作动器饱和比, 如图 4.10 所示

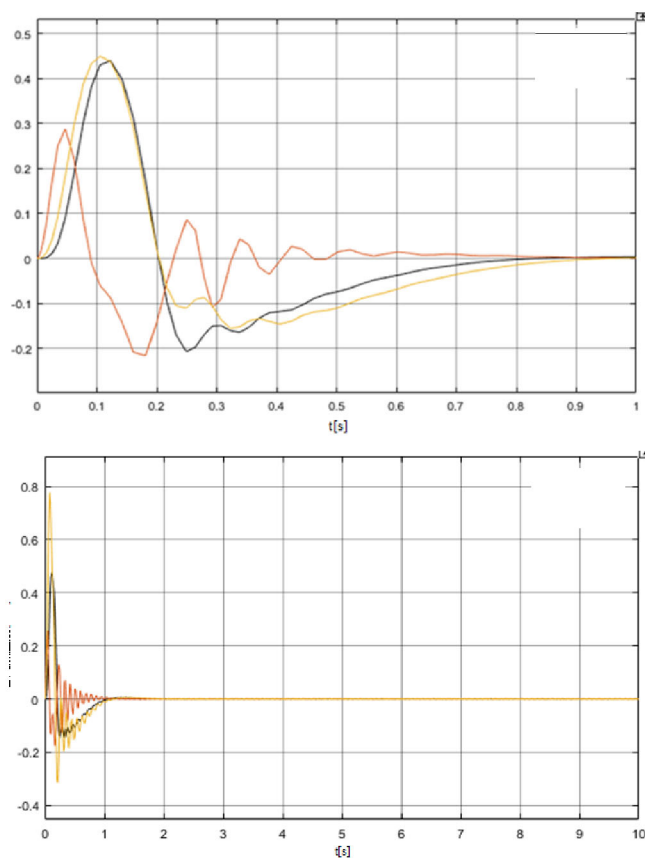


图4.10约束对比

通过对比悬架动行程比、动静载荷比和作动器饱和比可以得知, 对 H_∞/H_2 状态反馈控制引入扩展 LMI 法后, 降低了其广义 H_2 性能的保守性, 提高了其 H_∞ 性能的保守性, 这种相对保守性满足了硬件约束, 也提高了乘坐舒适性, 对于悬架控制显然是有利的, 说明了扩展 LMI 法有效。

4.6.2 基于遗传算法的 LQR 控制器仿真

根据前文基于遗传算法的 LQR 控制器的设计方法, Simulink 输出悬架的三个性能指标: 车身垂向加速度、悬架动行程和轮胎动位移。这三项数据送入 workspace 中进行遗传算法的运算, 得到一组最优权值, 其值为: $q_1 = 4027.845$, $q_2 = 985256.515$, $q_3 = 987970.8$

将馈能悬架与被动悬架动力学性能进行对比, 对比内容包括: 垂向加速度、悬架动行程、轮胎动位移和作动力, 如图 4.11、4.12、4.13、4.14。

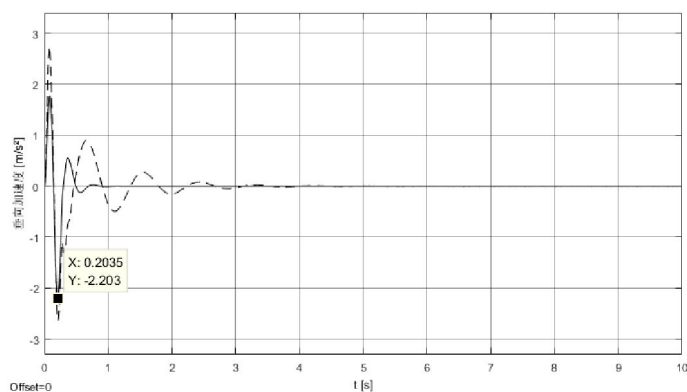


图4.11 馈能悬架与被动悬架的垂向加速度

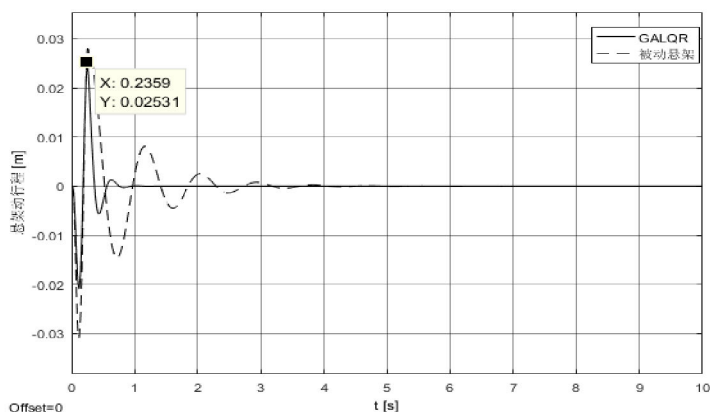


图4.12 馈能悬架与被动悬架的悬架动行程

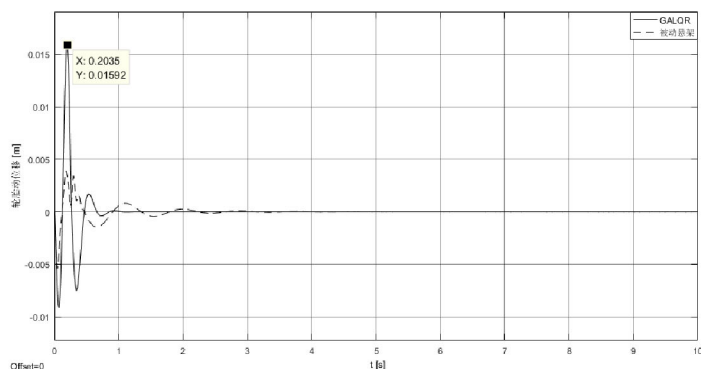


图4.13 馈能悬架与被动悬架的轮胎动位移

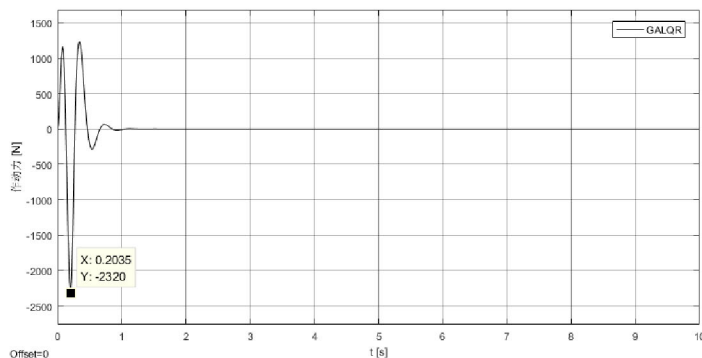


图4.14 馈能悬架的作动力

通过以上对比仿真可以得出结论：基于遗传算法的 LQR 控制器在改善乘坐舒适性方面起到了作用，优于被动悬架，并且满足时域硬约束。但是由于遗传算法本身易陷于局部最优解的缺点，导致其求解出的最优控制律出现问题，作动力过大，超出约束，这样对于回收能量显然是不利的。因此，对于该控制器，只进行馈能悬架的动力学性能仿真分析。

4.6.3 基于扩展 LMI 控制器仿真

基于前文设计的输出反馈控制器，下面将给出该控制器下 1/4 车辆馈能悬架的动力学性能和馈能效果。首先，根据馈耗比^{[66][67][68]}的概念，求出被动悬架机械阻尼耗能功率，设其为 $P_{consume}$ ，则

$$P_{consume} = \frac{1}{2} c_s \dot{z}^2 \quad (4.53)$$

相应的馈能功率为 $P_{recovery}$

$$P_{recovery} = \varphi \dot{z} - \left(\frac{F}{\varphi} \right)^2 R \quad (4.54)$$

馈耗比 η

$$\eta = \frac{\int_0^t P_{recovery} dt}{\int_0^t P_{consume} dt} \quad (4.55)$$

可以根据此公式来建立能量回收的 Simulink 模块。

下面，验证 PI 跟踪控制器的有效性，根据前文的设计的 PI 控制器，搭建 Simulink 仿真图^{[69][70][71]}，取适当的参数使得跟踪效果达到理想要求，跟踪幅值为 1 的正弦曲线，如图 4.15。

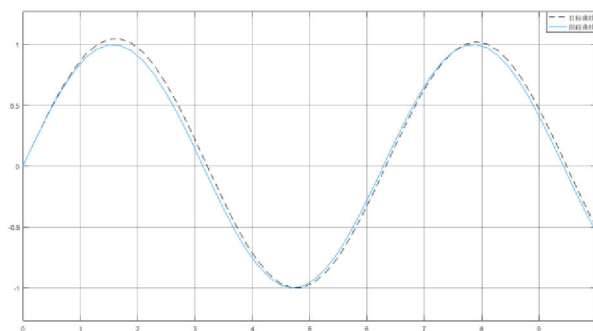


图 4.15 PI 跟踪效果图

本文上层控制器设计思路是在满足时域约束条件下，根据不同目标函数以及不同处理方法的动力学性能和馈能效果作对比。仿真时，在 H_∞ / 广义 H_2 输出反馈控制的大前提下有针对性地设计三种仿真方案：

- S1:** 未引入扩展方法，以乘坐舒适性为最优化性能，即性能输出为 $z_1(t)$
- S2:** 引入扩展方法，以垂向加速度、轮胎的形变速度为最优化性能，即性能输出为 $z_2(t)$
- S3:** 引入扩展方法，以垂向加速度、减震器电流和轮胎的形变速度为最优化性能，即性能输出为 $z_3(t)$

(1)垂向加速度

S1 情况下，馈能悬架与被动悬架的垂向加速度对比仿真如图 4.16 所示：

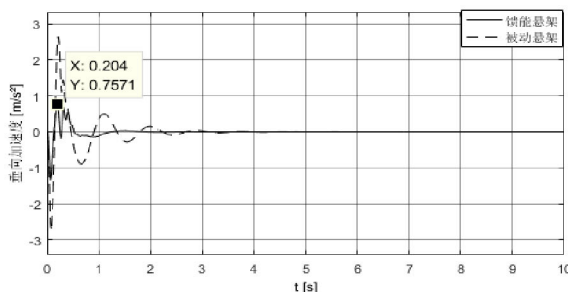


图 4.16 馈能悬架与被动悬架的垂向加速度

S2 情况下，馈能悬架与被动悬架的垂向加速度对比仿真如图 4.17 所示：

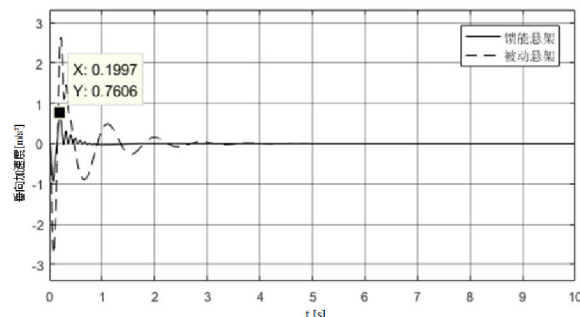


图 4.17 馈能悬架与被动悬架的垂向加速度

S3 情况下，馈能悬架与被动悬架的垂向加速度对比仿真如图 4.18 所示：

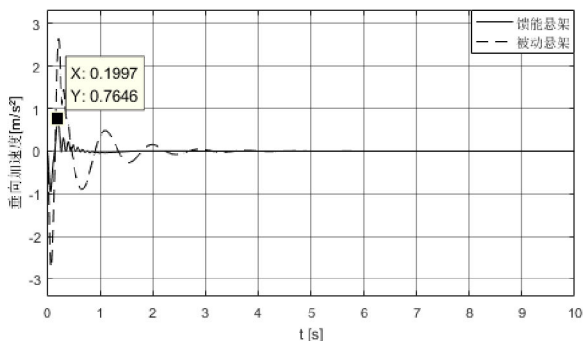


图 4.18 馈能悬架与被动悬架的垂向加速度

通过以上三组对比仿真，可以看到三种情况的馈能悬架垂向加速度峰值均小于被动悬架，并且比被动悬架更快的进入到稳态，而乘坐舒适性方面，S2 优于 S1 和 S3。

(2)时域约束

S1、S2、S3 与被动悬架的悬架动行程比、动静载荷对比仿真分别如图 4.19、4.20、4.21 所示。

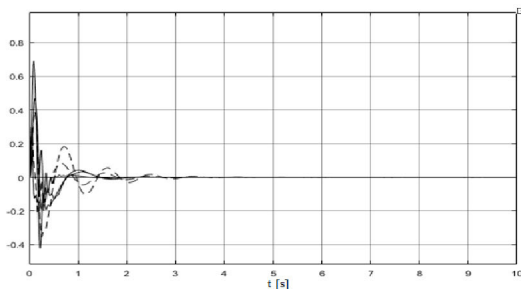


图 4.19 S1 悬架动行程比、动静载荷比
(实线：馈能悬架虚线：被动悬架)

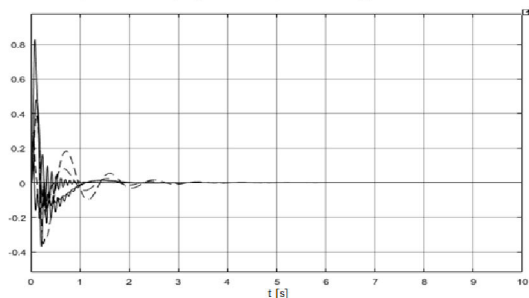


图 4.20 S2 悬架动行程比、动静载荷比
(实线：馈能悬架虚线：被动悬架)

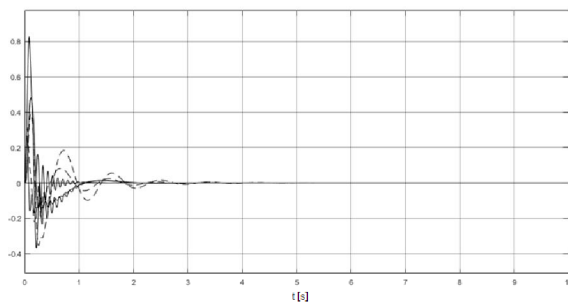


图 4.21 S3 悬架动行程比、动静载荷比
(实线：馈能悬架虚线：被动悬架)

通过对比可以发现，馈能悬架和被动悬架的悬架动行程、动静载荷比均能满足约束要求，但是馈能悬架相比于被动悬架，悬架动行程比相对恶化，这是由于目标函数与约束之间的矛盾造成的，即牺牲了一定的悬架动行程，来优化乘坐舒适性和馈能效果。

(3) 作动力

S1、S2 和 S3 的作动力仿真如图 4.22、4.23、4.24 所示。

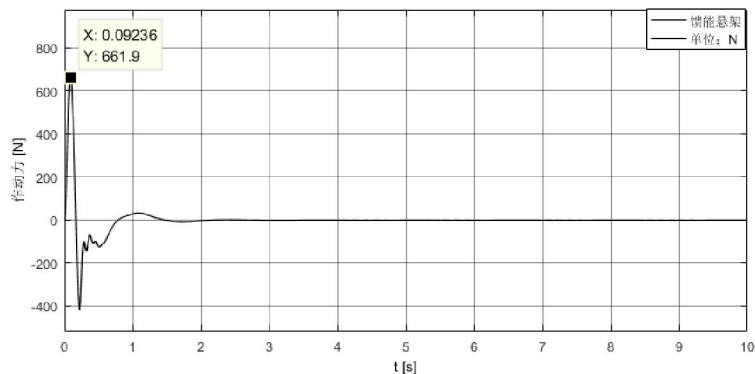


图 4.22 馈能悬架作动力

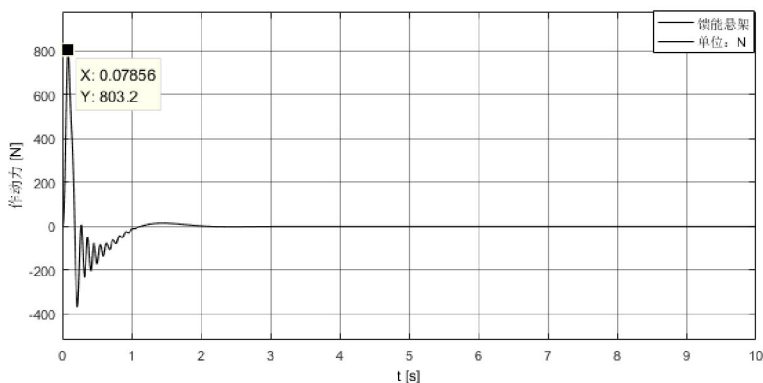


图 4.23 馈能悬架作动力

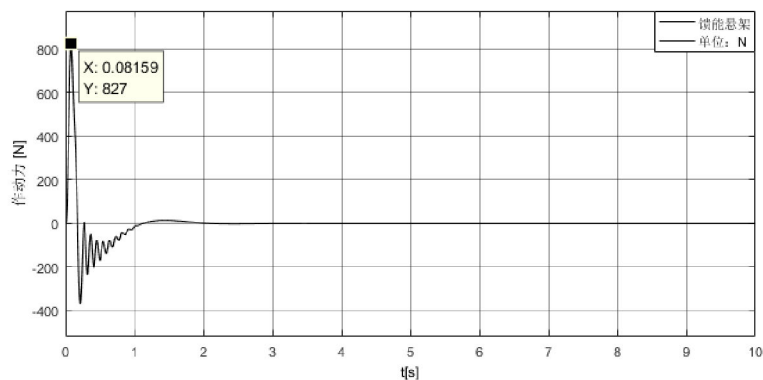


图 4.24 馈能悬架作动力

通过对比可以发现，扩展 LMI 法降低了保守性：引入松弛变量使得减震器能够以更大的作动力来抵抗振动。

4.6.4 馈能效果仿真分析

根据文献[72]，馈耗比越大，馈能效果越好，本文通过计算馈耗比来验证 S1、S2、S3 馈能效果。根据前文电机工作原理分析，馈能悬架系统回收的能量是直线电机所回收的负向电能，在仿真时直接对执行机构电路负向电功率进行积分，所得到的积分值即代表馈能悬架系统回收的能量，S1、S2、S3 回收的能量如图 4.25、4.26、4.27 所示。

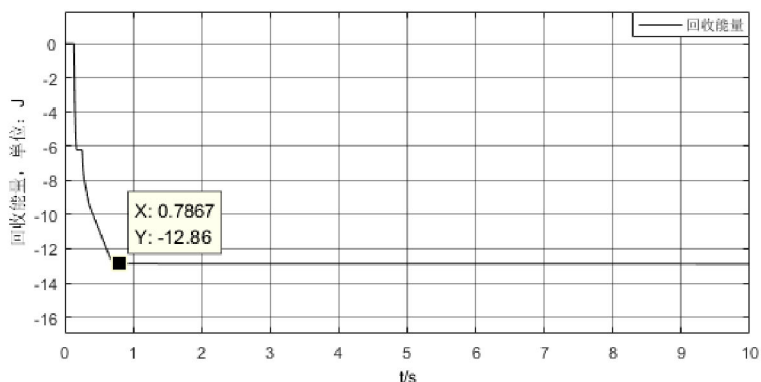


图 4.25 馈能悬架回收能量

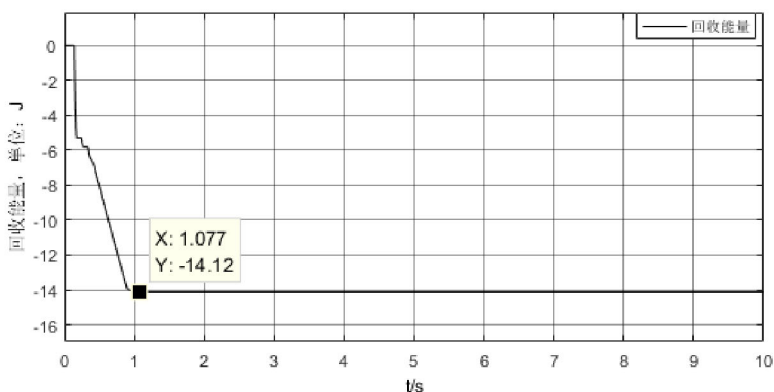


图 4.26 馈能悬架回收能量

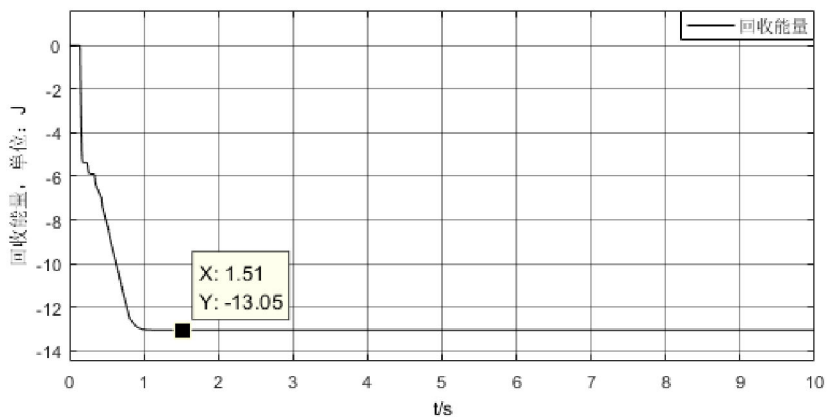


图 4.27 馈能悬架回收能量

通过仿真，获得了 S1、S2、S3 回收能量的数据，对数据进行整理计算，可以得到这样的结论：在包块路面输入下，被动悬架阻尼耗能为 25.81J，S1、S2 和

S3 的馈耗比分别为 49.86%、54.70%、50.56%。通过对比 S1、S2、S3 馈能效果，可以得到方案 S2 的馈能效果最好。

4.7 本章小结

本章主要对馈能悬架控制器进行了研究。首先，根据第二章的 1/4 车辆馈能悬架模型搭建了状态方程。然后，根据不同算法设计了三种控制器：基于遗传算法的 LQR 控制器、基于扩展 LMI 的状态反馈控制器、基于扩展 LMI 的输出反馈控制器。最后，通过 Matlab 软件仿真，进行了三种控制器下的悬架动力学性能分析和对比。此外，考虑不同的目标性能，对基于扩展 LMI 的输出反馈控制器的馈能效果进行了分析，经过计算后，可以得到这样的结论：以垂向加速度、轮胎的形变速度为优化性能，基于扩展 LMI 的输出反馈控制器下的馈能悬架系统能够满足时域约束，同时能够兼顾较好的乘坐舒适性和馈能效果

第5章 考虑参数扰动的馈能悬架控制算法

到目前为止，所做的设计分析都是以名义系统的参数完成，在考虑实际车身质量摄动变化，车辆实际使用中，由于系统的不确定性和外部扰动都会导致参数扰动问题的发生，如果依然采用根据名义系统设计出的控制器显然是不可行的，因此本章采用多胞 LPV 系统 H_∞ / 广义 H_2 输出反馈控制算法去解决这一问题。

5.1 参数扰动系统

本文主要针对汽车簧载质量发生变化导致悬架系统参数扰动的情况，参考前文 1/4 车辆馈能悬架模型，不失一般性，假设 $m_1 \leq m_s \leq m_2$ ，依赖于车身质量 m_s 的系统矩阵存在参数波动，设 m_s 的调度参数为 δ ，则考虑参数扰动的馈能悬架状态空间方程可以归纳为下式：

$$\dot{x}(t) = A(\delta)x + B_1(\delta)w + B_2(\delta)u \quad (5.1)$$

式中

$$A(\delta) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -\frac{k_s}{m_s} & -\frac{c_s}{m_s} & 0 & \frac{c_s}{m_s} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_s}{m_s} & \frac{c_s}{m_s} & -\frac{k_u}{m_u} & -\frac{c_s}{m_u} \end{bmatrix}, \quad B_1(\delta) = [0 \quad 0 \quad -1 \quad 0]^T,$$

$$B_2(\delta) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{m_s} & 0 & -\frac{1}{m_u} \end{bmatrix}^T, \quad \text{这里 } m_s \text{ 有一个 } 64\text{kg} \text{ 的变化 (即车身质量 } 320\text{kg, 在}$$

名义值基础上波动 $\pm 20\%$ 左右)，其它参数均与前文所述相同。

馈能悬架系统微分方程如下：

$$\begin{cases} \dot{x} = A(\delta)x + B_1(\delta)w + B_2(\delta)u \\ z_\infty = C_1(\delta)x + D_{11}(\delta)w + D_{12}(\delta)u \\ z_{g2} = C_2(\delta)x + D_{21}(\delta)w + D_{22}(\delta)u \end{cases} \quad (5.2)$$

式中 z_∞ 代表的是馈能悬架的归一化性能指标， z_{g2} 代表的是馈能悬架的归一化约束，相应的方程系数参照前文馈能悬架输出反馈的相应系数，含有参数 m_s 的系数矩阵均具有参数依赖性。

5.2 LPV 系统 H_∞ / 广义 H_2 输出反馈控制

在输出反馈控制中，控制器的状态方程一般如下：

$$\begin{cases} \dot{\xi} = A_k(\delta)\xi + B_k(\delta)y \\ u = C_k(\delta)\xi + D_k(\delta)y \\ y = C_3(\delta)x \end{cases} \quad (5.3)$$

将引理 6 引入引理 8，则通过 S-procedure 变换，引理 6 中的式子可以变换为下式：

$$\begin{bmatrix} -rX & qX + F^T A^T & X - F \\ (qX + F^T A^T)^T & -rX & A^T G_2 \\ (X - F)^T & (A^T G_2)^T & -F - F^T \end{bmatrix} < 0, \quad (5.4)$$

上式中 G_2 代表的是对称矩阵。

考虑如下 LPV 系统

$$\begin{cases} \dot{x} = A(\delta)x + B_1(\delta)w + B_2(\delta)u \\ z_\infty = C_1(\delta)x + D_{11}(\delta)w + D_{12}(\delta)u \\ z_{g2} = C_2(\delta)x + D_{21}(\delta)w + D_{22}(\delta)u \\ y = C_3(\delta)x \end{cases} \quad (5.5)$$

$$\text{式中 } A(\delta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_s}{\delta} & 0 & -\frac{c_s}{\delta} & \frac{c_s}{\delta} \\ \frac{k_s}{m_u} & -\frac{k_u}{m_u} & \frac{c_s}{m_u} & -\frac{c_s}{m_u} \end{bmatrix}, \quad B_1(\delta) = \begin{bmatrix} 0 \\ -2\pi\sqrt{G_0v} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_2(\delta) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\delta} \\ -\frac{1}{m_u} \end{bmatrix},$$

$$C_1(\delta) = \begin{bmatrix} -\frac{k_s}{\delta} & 0 & -\frac{c_s}{\delta} & \frac{c_s}{\delta} \end{bmatrix}, \quad D_{11}(\delta) = 0, \quad D_{12}(\delta) = \frac{1}{\delta},$$

$$C_2(\delta) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s_{\max}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k_u}{(\delta + m_u)g} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{21}(\delta) = 0, \quad D_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{u_{\max}} \end{bmatrix}^T,$$

$$C_3(\delta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

进一步地，我们将控制器带入，获得新的系统状态方程如下

$$\begin{cases} \dot{x} = A_{cl}(\delta)x + B_{1,cl}(\delta)w \\ z_\infty = C_{1,cl}(\delta)x + D_{11,cl}(\delta)w \\ z_{g2} = C_{2,cl}(\delta)x + D_{21,cl}(\delta)w \end{cases} \quad (5.6)$$

结合引入扩展 LMI 输出反馈控制中的 H_∞ / 广义 H_2 线性矩阵不等式组，引入极点配置 LMI^[73]，即可得到满足参数扰动系统的 LMI 组。

$$\begin{bmatrix} -[F]_s & (A_{cl}^T F + X_1)^T & F^T B_{cl} & F^T & 0 \\ A_{cl}^T F + X_1 & -X_1 & 0 & 0 & C_{cl}^T \\ B_{cl}^T F & 0 & -I & 0 & -D^T \\ F & 0 & 0 & -X_1 & 0 \\ 0 & C_{cl} & D & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0, \quad (5.7)$$

$$\begin{bmatrix} -F - F^T & F^T A_{cl}(\delta) + X_2 & F^T B_{1,cl}(\delta) & F^T \\ (F^T A_{cl}(\delta) + X_2)^T & -X_2 & 0 & 0 \\ (F^T B_{1,cl}(\delta))^T & 0 & -I & 0 \\ F & 0 & 0 & -X_2 \end{bmatrix} < 0, \quad (5.8)$$

$$\begin{bmatrix} -rX & qX + F^T A_{cl}^T(\delta) & X - F \\ (qX + F^T A_{cl}^T(\delta))^T & -rX & A_{cl}(\delta)G_2 \\ (X - F)^T & (A_{cl}(\delta)G_2)^T & -F - F^T \end{bmatrix} < 0, \quad (5.9)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{P}_1 & (\bar{C}_2(\delta))^T \\ \bar{C}_2(\delta) & \rho^2 I \end{bmatrix} > 0, \quad (5.10)$$

$$\bar{P}_1 = \begin{bmatrix} F & G(\delta) \\ G^T(\delta) & J \end{bmatrix} > 0. \quad (5.11)$$

$$D_k = \hat{D}(\delta)$$

$$C_k = (\hat{C}(\delta) - D_k C(\delta) X)(M^T)^{-1}$$

$$B_k = N^{-1}(\hat{B}(\delta) - Y B_2(\delta) D_k)$$

$$A_k = N^{-1}[\hat{A}(\delta) - Y(A(\delta) + B_2(\delta) D_k C(\delta)) X](M^T)^{-1} - B_k C(\delta) X (M^T)^{-1} - N^{-1} Y B_2(\delta) C_k$$

求解 LMI 组：(5.7)、(5.8)、(5.9)、(5.10)、(5.11)，并结合上式即可求得含簧载质量变化的馈能悬架系统控制律。

5.3 LPV 馈能悬架系统仿真

在仿真中，由于 LMI 工具是针对线性化的矩阵进行仿真计算，而我所做的理论推导得到的 LMI 组是参数依赖的，因此，在实际仿真中，依赖于车身质量的系统矩阵，需要进一步处理，依据文献[74]，选择这样一种规则来赋予其值，设依赖于簧载质量 m_s 的系统矩阵可以表示如下形式：

$$(A(\delta), B_1(\delta), B_2(\delta), C_1(\delta), C_2(\delta), D_{11}(\delta), D_{12}(\delta), D_{21}(\delta), D_{22}(\delta)) = \sum_{i=1}^2 \alpha_i (A_i, B_{1i}, B_{2i}, C_{1i}, C_{2i}, D_{11i}, D_{12i}, D_{21i}, D_{22i}), \quad \sum_{i=1}^2 \alpha_i = 1$$

上式中, $\alpha_1 = \left(\frac{1}{m_s} - \frac{1}{m_2}\right) / \left(\frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2}\right)$, $\alpha_2 = \left(\frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_s}\right) / \left(\frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2}\right)$

并且, 表征 H_∞ / 广义 H_2 性能中的李雅普诺夫函数也是关于调度参数的函数矩阵, 设

$$X_1(\delta) = \sum_{i=1}^2 \alpha_i \begin{bmatrix} X_{i1} & X_{i2} \\ X_{i2}^T & X_{i3} \end{bmatrix} > 0 \quad X_2(\delta) = \sum_{i=1}^2 \alpha_i \begin{bmatrix} X_{i4} & X_{i5} \\ X_{i5}^T & X_{i6} \end{bmatrix} > 0, \quad X(\delta) = \sum_{i=1}^2 \alpha_i \begin{bmatrix} X_{i7} & X_{i8} \\ X_{i8}^T & X_{i9} \end{bmatrix} > 0$$

如上形式的系统矩阵称为仿射参数依赖矩阵, 李雅普诺夫函数法可以有效地解决这一类多胞 LPV 问题, 关于调度参数 δ 的矩阵系数就变成了关于 α_i 的矩阵系数。

下面对 LPV 系统 H_∞ / 广义 H_2 输出反馈控制器下的 1/4 馈能悬架舒适性和约束进行仿真分析。

(1) 垂向加速度

利用 5.3 节中的结果和 Matlab 中的 LMI 工具箱, 求解相应的问题, 对 1/4 车辆的馈能悬架系统与被动悬架系统性能来验证所设计控制器的有效性。当悬架的簧载质量处于波动状态, 实际簧载质量 m_s 有一个 64kg 的变化条件下, 对被动悬架系统和馈能悬架系统给定确定性坑包路面输入, 如图 5.1 所示, 对比被动悬架和馈能悬架的垂向加速度效果。

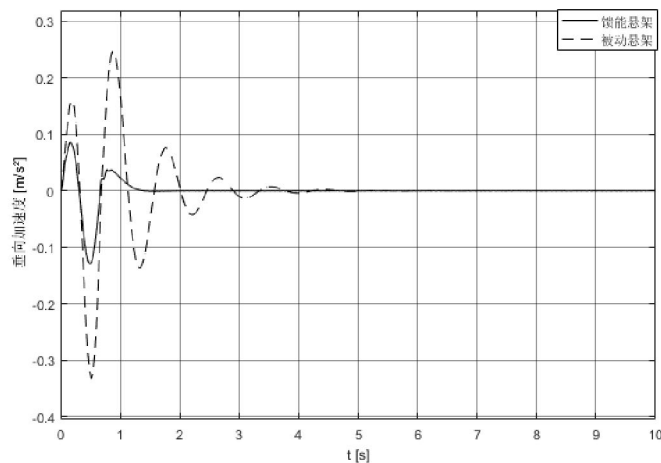


图 5.1 馈能悬架与被动悬架的垂向加速度

从图中可以看出, 在所设计的控制器作用下, 车身的垂向加速度幅值大大减小。

(2) 时域约束

如图 5.2, 是馈能悬架在存在簧载质量扰动下的时域约束仿真。

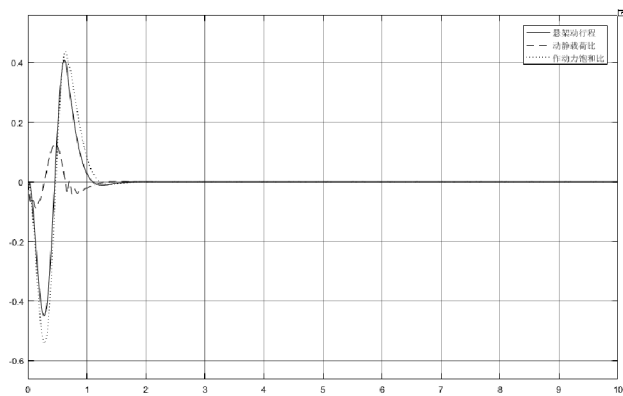


图 5.2 馈能悬架

从图中可以看出，即使存在着参数扰动问题，所设计的控制器依然能够使车身的悬架动行程、动静载荷比、作动力饱和比的绝对值处于 1 以下，满足时域约束。

(3) 作动力

考虑到作动器的饱和问题，在求解控制器时对作动力进行了约束，作动力大小如图 5.3 所示：

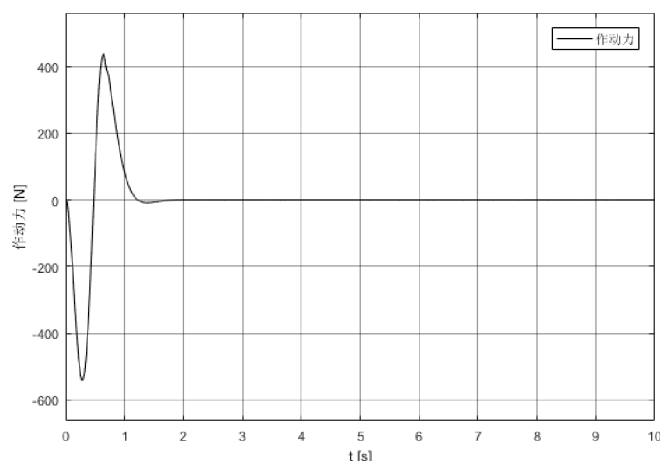


图 5.3 馈能悬架作动力

从图中可以看出，作动力的大小在 1000N 之内，远小于额定值。

5.4 本章小结

本章主要研究考虑参数扰动的馈能悬架系统的控制器设计方法，针对一种具有簧载质量波动的悬架系统，提出了一种连续时间多胞线性变参数系统 H_∞ 广义 H_2 输出反馈控制方法。首先，根据第三章的理论知识，对参数依赖悬架系统进行问题转化，将该系统转化为 LMI 问题。然后，考虑到 LMI 工具箱对相关参数的要求，对参数扰动系统状态方程的系数矩阵进行了参数整定^[74]。最后通过软件仿真，对比该控制器下的馈能悬架和被动悬架的动力学性能仿真结果，结果验证了该控制器对含参数扰动的悬架系统动力学性能有显著的改善。

第 6 章总结与展望

6.1 全文总结

本文以 LMI 作为优化工具,以滚珠丝杠式结构减震器、永磁无刷直流电机及其它阻尼元件构成的 1/4 车辆馈能悬架为主要研究对象,并针对馈能悬架的动力学性能和馈能效果展开研讨。

馈能悬架的控制器设计是一个多目标优化问题,为了使馈能悬架能够有效地提高馈能效率并尽可能改善乘坐舒适性,分别选取(1)乘坐舒适性,(2)乘坐舒适性和轮胎的形变速度,(3)垂向加速度、减震器电流和轮胎的形变速度为最优化性能。同时,为了降低保守性,利用 S-procedure 引入松弛变量。

通过理论分析和 Matlab/Simulink 软件仿真,可以得出以下结论:

(1) 根据能耗分析,可以判断车辆动能变化量、弹性元件吸收能量、轮胎耗散能量是能量损耗的三个主要因素,针对这三点因素,采用一定的优化方法,完全可以达到减小能耗,增加馈能效果的目的。

(2) 在鲁棒控制中,一种以 H_{∞} 性能为目标函数,以广义 H_2 性能为约束条件的优化问题,可以通过 S-procedure 中的结论进行李雅普诺夫矩阵的解耦,降低保守性,而且这种方法不仅可以用于状态反馈控制,还可以用于输出反馈控制。

(3) 悬架的实际应用中,由于遗传算法早熟的缺陷,导致基于遗传算法的 LQR 控制器不能够及时准确地求得作动器的控制律,这种控制算法还有需要改进的空间;状态反馈控制中,一些状态量难以通过传感器直接获得。因此,笔者通过采用输出反馈的方式去解决上述问题,并通过仿真验证了这一控制算法的有效性,最后得出结论:采用基于扩展 LMI 法的输出反馈控制器有效,并且在此种反馈的前提下,以垂向加速度、轮胎形变速度为 H_{∞} 优化性能,以动静载荷比、轮胎动位移、作动器饱和度的广义 H_2 性能为约束的控制器,能够使馈能悬架在保证较好的舒适性的同时,达到良好的馈能效果。

6.2 后续工作展望

本文虽然对馈能悬架主动控制进行了一定的研究,但是仍有很大的空间去完善和深究,对后续的研发有以下三点展望:

(1) 本文提出的反步法跟踪控制器,为了验证上层控制器的有效性,只是简单地将电磁作动器的作动力与电流之间的关系表示为线性关系。实际上,由于作动器中存在磁耦合现象和一些电感元件的干扰,这种线性关系是不存在的,后者可以对该部分进行详细的分析和研究。

(2) 本文主要从能量消耗最小化入手，并未正面做到回收能量最大化，希望后续工作者能够找到代表能量回收的状态量，进行更深一层的研发。

(3) 在第五章中，本人针对车辆实际应用中存在参数摄动的问题，采用多胞系统结合扩展 LMI 法来设计控制器，通过仿真对比其与被动悬架的动力学性能，但是并未对其馈能效果进行仿真分析，需要通过后续工作来进行完善。

参考文献

- [1] 陈家瑞.汽车构造[M].北京:机械工业出版社,2005.
- [2] 左效波.汽车结构及拆装[M].北京:电子工业出版社,2015.
- [3] Penguin.European Currency Unit (ECU) [M].2003.
- [4] 戴建国,王程,刘正凡,朱建辉,胡晓明.馈能悬架技术研究综述[J].科学技术与工程,2018,18(30):P131-139.
- [5] Derick Balsiger, Todd Kazmirski, Mike Shaw.Management of Regenerated Energy in Electro-Mechanical Actuators for Aerospace Application[J]. SAE International Journal of Aerospace 2012, 5(2):P455-466.
- [6] PW Wheeler, T Hamiti, C Gerada, M Rottach.Fault-tolerant electrical machine design within a Rotorcraft Actuation Drive System optimisation[J]. Iet International Conference on Power Electronics, 2012 :1-6.
- [7] Khoshnoud F, Yuchi Zhang, Shimura R, Shahba A, Guangming Jin, Pissanidis GChen, YK, De Silva, CW.Energy Regeneration From Suspension Dynamic Modes and Self-Powered Actuation[J]. IEEE/ASME Transactions on Mechatronics, 2015, 20(5): P2513-2524.
- [8] Valikhani, D;Bolivar, J.M;Viefhues, M;McIlroy, D.N.;Vrouwe, E.X.;Nidetzky, B A Spring in Performance: Silica Nanosprings Boost Enzyme Immobilization in Microfluidic Channels(Article)[J]. ACS Applied Materials and Interfaces 2017, 9(40): P34641-34649.
- [9] Fan Wu, Wang Yang, Runtong Chen, Xinfang Xie.Broadband Communications for High-Speed Trains via NDN Wireless Mesh Network[J].Tsinghua Science and Technology, 2018, 23(4): P419-430.
- [10] 任龙,周金波,陈仁文.基于 Halbach 永磁阵列的电磁式馈能减震器 [P].201210558518.8.
- [11] 林鑫.馈能悬架的动力学分析与设计方法研究[D].吉林大学,2012.
- [12] 朱桂林.一种用于能量回收馈能减震器[P].201420871637.3.
- [13] 任旭辉.汽车滚珠丝杠式馈能减震器的仿真分析与研究[D].沈阳理工大学,2016.

- [14] 李明生, 高峰, 杨关发.一种无人机电子元器件的集成减震装置 [P].201820774702.9.
- [15] Mirsky.S Fuzzy Math[J]. Scientific American, 2016, Vol.314, No.3, P74.
- [16] 徐志强, 高瑞贞, 张京军, 韩卫沙.基于 Adams/Car 和 Matlab/Simulink 的汽车半主动悬架模糊控制研究[J].机械设计与制造, 2011, 8: P101-103.
- [17] 李景阳, 王伟.基于 AMESim 的汽车主动悬架系统的仿真与优化分析[J].河南科技(上半月), 2014, 7: P86-87.
- [18] 周瑜.某轿车车身姿态半主动悬架最优控制研究[D].吉林大学, 2016.
- [19] 张玉峰, 龙金莲, 李婧, 卢家暄.基于免疫粒子群优化的主动悬架 LQG 控制研究[J].计算机工程与应用, 2018, 54(6): P252-256.
- [20] 解学书.最优控制理论与应用[M].北京: 清华大学出版社, 1986.
- [21] 高小林, 曹青松.考虑控制时滞的主动悬架离散系统最优控制[J].噪声与振动控制, 2018,A1:326-329.
- [22] 柳江,林晨,叶明,黎晓伟.馈能悬架变论域模糊控制[J].上海交通大学学报, 2016,50(8): 1139-1143.
- [23] 柳江,黎晓伟,滕杨磊,张业.馈能型主动悬架 LQG 控制研究[J].机械设计与制造, 2018, 6: 90-93.
- [24] 林晨.馈能型主动悬架控制算法研究[D].青岛理工大学, 2015.
- [25] 孙鹏远.基于 LMI 优化的主动悬架多目标控制研究[D].吉林大学, 2004.
- [26] 于树友.基于滚动优化的约束主动悬架控制系统研究[D].吉林大学, 2004.
- [27] SatoM, Peaucelle.D Robust Stability/Performance Analysis For Uncertain Linear Systems Via Multiple Slack Variable Approach: Polynomial LTIPD Systems[A].Decision and Control, 2007 46th IEEE Conference onNew Orleans, LA 2007.
- [28] 黄燕飞.滚珠丝杠式馈能减震器设计与动力学分析[D].沈阳理工大学, 2017.
- [29] 陈虹, 马苗苗, 孙鹏远.主动悬架 H^∞ /广义 H_2 输出反馈控制[J].控制理论与应用, 1000-8152(2007)05-0790-05.
- [30] 蒋莉.智能汽车主动悬架输出反馈控制方法研究[D].哈尔滨工业大学, 2016.
- [31] Rawling, JBand DQ, Mayne.Model Predictive Control:Theory & Design.Nob Hill Publishing, Madison, WI.2009.

- [32] 郑雪春. 馈能式汽车电动主动悬架的理论及试验研究[D]. 上海交通大学, 2007
- [33] L. and J. Pannek. Nonlinear Model Predictive Control: Theory and Algorithms. 2011, Communication and Control Engineering. Springer Verlag.
- [34] Aguiar A.P., Dacic D.B, Hespanha J.P. and Kokotovic P. Path following or reference tracking an answer relaxing the limits to performance[C]. Proceedings of the 5th IFAC/EURON Symp. Intell. Auton Veh., Lisbon, Portugal, July 2004.
- [35] 周克敏. 鲁棒与最优控制[M]. 北京: 国防工业出版社 2001.
- [36] 俞凡. 线性矩阵不等式[M]. 北京: 清华大学出版社 2002.
- [37] 郁磊, 史峰, 王辉. MATLAB 智能算法 30 个案例分析[M]. 北京航空航天大学出版社 2015.
- [38] Zhang, Guosheng. GALQR optimal control method and applying in the active suspension system[J]. Proceedings of the international conference on intelligent systems and knowledge engineering (ISKE 2007) 2007.
- [39] 宋雪健, 郑宾, 陈晔, 王天琪, 宋雁鹏. 基于多种群遗传算法的 LQR 振动主动控制研究[J]. 科学技术与工程, 2016, 16(29): P103-109
- [40] 岳杰, 张进秋, 彭志召, 张磊. 基于遗传算法的履带车辆电磁悬挂 LQR 控制优化[J]. 机械设计与制造 2015, 22(37): P229-232.
- [41] Tan, Yan Zhi, Pang, Chee Khiang. Relaxing LMI Conservatism Using Nyquist Plots and Its Application to Robust Mechatronics Synthesis[J]. IEEE transactions on control systems technology 2017, 25 (2): P600-610.
- [42] Faria, FA. Reducing the conservatism of LMI-based stabilisation conditions for TS fuzzy systems using fuzzy Lyapunov functions[J]. International Journal of Systems Science, 2013, 44(10): P1956-1969.
- [43] Xiang-Peng Xie. An efficient approach for reducing the conservatism of LMI-based stability conditions for continuous-time T-S fuzzy[J]. Fuzzy Sets and Systems, Vol.263, P71-81.
- [44] 郝峰, 叶思隽, 车晓涛. 基于改进 LMI 的鲁棒 H^∞ 动态输出反馈控制综合[J]. 弹箭与制导学报, 2017, 37(2): P5-10.
- [45] Chesi, G (Chesi, Graziano). On the Synthesis of Output Feedback Controllers for Robust D-Stability via LMIs[J]. 2017, SICE International symposium on control systems (sice iscs), 2017: P1-6.

- [46] Xu SY. Robust H-infinity control for uncertain discrete-time systems with time-varying delays via exponential output feedback controllers[J]. *Systems and Control Letters*, 2004, 51(3-4): P171-183.
- [47] Ashpana. Shiralkar. Robust output feedback control of electro-hydraulic system[J]. *International Journal of Dynamics and Control*, 2019, 7(1): P295-307.
- [48] Xinxin Shao, Fazel Naghdy. Output feedback H-infinity control for active suspension of in-wheel motor driven electric vehicle with control faults and input delay[J]. *ISA, Transactions*, 2019.
- [49] Wang, G (Wang, Gang). Optimization and static output-feedback control for half-car active suspensions with constrained information[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2016, 378: P1-13.
- [50] Hongyi Li, Xingjian Jing, Hamid Reza, Karimi. Output-Feedback-Based H-infinity Control for Vehicle Suspension Systems With Control Delay[J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2014, 61(1).
- [51] 林晨. 馈能型主动悬架控制算法研究[D]. 青岛理工大学, 2015.
- [52] Eduardo, Hernández-Márquez, Bidirectional. Tracking Robust Controls for a DC/DC Buck Converter-DC Motor System[J]. *Complexity*, 2018, 2018(1076-2787).
- [53] Puangdownreong, Deacha. Optimal PID Controller Design for DC Motor Speed Control System with Tracking and Regulating Constrained Optimization via Cuckoo Search[J]. *Journal of electrical engineering & technology*, 2018, 13(1): P460-467.
- [54] Li Chengcheng. H-infinity output tracking control of Electric-motor-driven aerodynamic Load Simulator with external active motion disturbance and nonlinearity. [J]. *Journal of electrical engineering & technology*, 2018, 14(3): P360-367.
- [55] 范承志. 电路原理[M]. 北京: 机械工业出版社, 2010.
- [56] 王莉娜, 朱鸿悦, 杨宗军. 永磁同步电动机调速系统 PI 控制器参数整定方法[J]. *电工技术学报*, 2014, 5, P104-117.
- [57] Camden Howard. *Control Theory Fundamentals*[M]. Larsen And Keller, 2017, P230.
- [58] 汤天浩, 谢卫著, 陈伯时, 李杰仁. *电机与拖动基础*[M]. 北京: 机械工业出版社, 2018.

- [59] Duan,Guangren.LMIs in control systems[M].Taylor & Francis, 2013.
- [60] Boyd,Stephen.Convex optimization[M].世界图书出版公司, 2013.
- [61] Boyd,Stephen.Linear controller design[M].Prentice Hall, 1991, 416.
- [62] 马苗苗.基于 LMI 优化的主动悬架鲁棒控制研究[D].吉林大学, 2006.
- [63] 秦长涛,段广仁.混合 H_2/H_∞ 状态反馈控制[J].华中科技大学学报·自然科学版, 2010, 38(3), P57-60.
- [64] 杨志红,马广富,李传江.基于扩展 LMI 的多目标 H_2/H_∞ 状态反馈控制综合[J].电机与控制学报, 2004, 4: P333-337.
- [65] Keke Shi, Chuang Liu, Feng Wang.Mixed H_2/H -infinity State Feedback Attitude Control of Microsatellite Based on Extended LMI Method[J]. 哈尔滨工业大学学报(英文版), 2016, 5: P15-22.
- [66] Thiagarajan, JSathishkumar.Development and control of active suspension system with energy regeneration implementation scheme[J]. International Journal of Vehicle Structures and Systems, 2018, 10(3): P195-198.
- [67] Yan , S Sun.Self-powered suspension criterion and energy regeneration implementation scheme of motor-driven active suspension[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2017, 94: P297-311.
- [68] Khoshnoud F, Yuchi Zhang.Energy Regeneration From Suspension Dynamic Modes and Self-Powered Actuation[J]. IEEE/ASME Transactions on Mechatronics, 2015, 20(5): P2513-2524.
- [69] Akram Hussein Ahmed, Abd El samie B, KotbA.B.Modeling and Simulation of Brushless DC Motor with PI Speed Control[J].Journal of Engineering and Applied Sciences, 2018, 13(14): P5781-5788.
- [70] Tan Zhili, Zhu Dongjiao.Simulation of PI Control Strategy for Doubly Fed Induction Generation[C]. 2015 World Conference on Control, Electronics and Electrical Engineering(WCEE 2015), 中国上海, 2015
- [71] Khoshnoud F.Suspension energy regeneration for random excitations and self-powered actuation[J].2014 IEEE International conference on systems, man and cybernetics (SMC), 2014: P2519-2524.

- [72] Satoh, T, SaitohN.Design of critical control systems using genetic algorithms and LMI-based regional pole assignment technique[C]. Robotics, Automation and Mechatronics, 2004 IEEE Conference.
- [73] Li, HF (Li Huifeng).Robust LMI Control for Hypersonic Flight Vehicles Based on Specified Region Pole Assignment[J].Proceedings of 2010 asia-pacific international symposium on aerospace technology, 2010, 1(2): P620-623
- [74] 高会军.基于参数依赖 Lyapunov 函数的不确定动态系统的分析与综合[D].哈尔滨工业大学, 2005

作者简介

作者简介：

刘清宇：男，1990年5月23日生人，满族，吉林大学在读硕士研究生；

2009年至2013年于长春工业大学电气工程学院攻读本科，自动化专业

2013年至2016年工作于中国石油天然气吉林石化分公司动力二厂

2016年至2019年就读于吉林大学通信工程学院控制工程专业硕士研究生

致谢

时光荏苒，岁月如梭，时年二十有九，而立之年当自立。

三年前，我还在中国石油天然气吉林石化分公司工作，由于自小生性顽劣，在学习上并没有下到应有的功夫，所以，虽然有着一份稳定的工作，当我意识到自己在学业上仍有欠缺，便毅然决然的准备考研，希望回到学校继续深造。事情不在于简单和困难，而在于是否真的想做，当一件事是我必须要做到的，没有退路可言，所有的义无反顾都会变成一种习惯。坦然，一切都很顺利，我回到了学校。这里，我要感谢我的母亲，姐姐，在我决定辞职考研的时候，她们都坚定的支持着我，无论是经济上还是生活起居上，她们都对我无微不至、无任何条件地给予照顾。

感谢我的导师于树友，在研究生的三年期间里，他都给予了我极大的指导和帮助。如果把学生的思维比作水滴，那么，导师的思维就好比是汪洋大海，于老师敏捷的思维和渊博的学术底蕴让我钦佩，老师严谨的学术态度让我耳濡目染。

读研期间，我有幸结识了艾星辰同学，感谢她在我上学期间对我的照顾，在我最困难的时候，她依然对我不离不弃，包容我的各种缺点，当我遇到学习或是生活中的困难时，她都会耐心的劝导我，并指引方向。

感谢老师马贺，在我人生的转折点，为我指点迷津；感谢老师卢佳，教我改正不好的习惯；感谢马铭泽小同学，在我迷茫的时候，陪伴着我，带给我欢声笑语。

感谢同组的王伍洋、周雨、冯阳阳，是你们使我的研究生生活靓丽多彩，是你们关于学术的讨论让我受益匪浅。

感谢同组的师弟、师妹们，是你们在我课题研究的过程为我提供帮助。

最后，感谢所有帮助、关心、照顾过我的人们，你们使我的研究生生活变得充实。