

分 类 号：TP273  
研究生学号：2018524050

单位代码：10183  
密 级：公开



# 吉 林 大 学

## 硕 士 学 位 论 文

(专业学位)

主动悬架  $H_\infty$ /广义  $H_2$  控制研究

$H_\infty$ /Generalized  $H_2$  Control of Active Suspension

作 者 姓 名：曹瑞丽

类 别：工程硕士

领 域（方向）：控制工程

指 导 教 师：于树友 教授

培 养 单 位：通信工程学院

2021 年 6 月



---

主动悬架  $H_\infty$ /广义  $H_2$  控制研究

---

$H_\infty$ / Generalized  $H_2$  Control of Active Suspension

---

作者姓名：曹瑞丽

领域（方向）：控制工程

指导教师：于树友 教授

类别：工程硕士

答辩日期：2021 年 5 月 29 日



## 吉林大学硕士学位论文原创性声明

本人郑重声明：所呈交学位论文，是本人在指导教师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已经注明引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品成果。对本文的研究做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本人完全意识到本声明的法律结果由本人承担。

学位论文作者签名：曹瑞丽

日期：2021年6月1日



## 关于学位论文使用授权的声明

本人完全了解吉林大学有关保留、使用学位论文的规定，同意吉林大学保留或向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅和借阅；本人授权吉林大学可以将本学位论文的全部或部分内 容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或其他复制手段保存论文和汇编本学位论文。

(保密论文在解密后应遵守此规定)

论文级别：  硕士  博士

学科专业： 控制工程

论文题目： 主动悬架  $H_\infty$ /广义  $H_2$  控制研究

作者签名：曹瑞丽

指导教师签名：于树友

2021年6月1日

作者联系地址（邮编）： 吉林省长春市南关区人民大街 5988 号  
(130022)

作者联系电话： 13039012813





# 摘要

汽车悬架的控制问题是一个存在路面大干扰作用的多目标控制问题，不仅要提高乘坐舒适性，还要始终保证轮胎接地以及保证悬架动行程、执行器输出不超出最大限制，而且这些控制目标之间相互制约、存在矛盾。本文将主动悬架系统的被控输出分为性能输出和约束输出分别处理，以 $H_\infty$ 范数优化性能输出并采用广义 $H_2$ 范数描述系统约束，进行主动悬架 $H_\infty$ /广义 $H_2$ 控制研究。

以1/4车主动悬架为研究对象，针对滚动时域 $H_\infty$ /广义 $H_2$ 控制方法在线计算量大、控制器求解耗时的问题，本文提出了离线优化的滚动时域 $H_\infty$ /广义 $H_2$ 控制方法。该控制方法不仅能大大缩短控制器求解时间、降低在线计算量，非常有利于应用在实际的悬架系统中，而且能够兼顾提高控制性能和满足系统约束，在大扰动作用下依然能够保证约束不超出范围。考虑到实际悬架系统中并非所有的状态量都能直接测量得到，本文利用主动悬架有限的状态信息作为控制系统的反馈量，设计了 $H_\infty$ /广义 $H_2$ 静态输出反馈控制策略。

本文对所设计的控制策略给出了不同车速下的仿真结果和分析，同时主动悬架硬件在环实验的实验结果进一步验证了所设计的控制方法的切实有效性和优越性。

## 关键词：

主动悬架，线性矩阵不等式，滚动时域，离线优化，静态输出反馈控制，硬件在环实验



# Abstract

The vehicle suspension control problem can be formulated as a multi-objective control problem with large disturbance from road surface. The control objectives for the vehicle suspension include improving ride comfort, maintaining firm contact between wheels and the road, keeping suspension travel and actuator output within an allowable maximum. Moreover, these performance specifications are mutually restricted and contradictory. In this paper, the controlled outputs of the active suspension system are divided into performance output and constraint output. We consider to take  $H_\infty$  norm of the closed loop system as the optimized objection, and capture the time-domain hard constraints by generalized  $H_2$  norm directly to study  $H_\infty$ /generalized  $H_2$  control of the active suspension system.

The quarter-car active suspension is taken as the plant in this paper. Moving horizon  $H_\infty$ /generalized  $H_2$  control scheme takes much time and requires a large amount of online calculation, which is not conducive to the application in the practical systems. Thus, an off-line optimized moving horizon  $H_\infty$ /generalized  $H_2$  control scheme for active suspension system is presented. The control scheme not only greatly reduces the solution time of the controller and significantly decreases online computational burdens, but also manages the trade-off between required high performance and satisfying hard constraints, keeps hard constraints within bounds under the excitation of large road disturbance. Moreover, considering that states in the practical suspension system are in general not fully measurable, we propose  $H_\infty$ /generalized  $H_2$  static output feedback control strategy, which uses part of suspension system states as the feedback.

Simulation results and hardware-in-the-loop experiments results in deferent vehicle speeds are provided to verify the effectiveness and superiority of the the proposed control strategy in this paper.

## Key Words:

Active Suspension, Linear Matrix Inequality, Moving Horizon, Off-line Optimization, Static Output Feedback Control, Hardware-in-the-Loop Experiment



# 目 录

<b>第1章 绪论</b>	<b>1</b>
1.1 悬架系统概述.....	1
1.2 主动悬架控制策略研究现状.....	3
1.3 悬架控制的特点.....	5
1.4 本文的研究内容.....	6
<b>第2章 主动悬架系统</b>	<b>9</b>
2.1 路面输入模型.....	9
2.1.1 随机路面输入.....	9
2.1.2 确定性路面输入.....	10
2.2 悬架系统建模.....	12
2.3 悬架系统性能评价.....	14
2.4 控制问题描述.....	15
<b>第3章 主动悬架硬件在环实验平台</b>	<b>17</b>
3.1 主动悬架硬件在环实验平台硬件组成.....	17
3.1.1 主动悬架实验台.....	17
3.1.2 传感器.....	18
3.1.3 数据采集卡.....	19
3.1.4 功率放大器.....	19
3.2 主动悬架硬件在环实验平台软件构成.....	19
3.3 主动悬架硬件在环实验平台工作原理.....	20
3.4 本章小结.....	21
<b>第4章 离线优化的滚动时域<math>H_\infty</math>/广义<math>H_2</math>控制主动悬架</b>	<b>23</b>
4.1 LMI理论基础.....	23
4.1.1 线性矩阵不等式.....	24
4.1.2 系统性能的LMI分析.....	26
4.2 滚动时域 $H_\infty$ /广义 $H_2$ 主动悬架.....	29
4.2.1 滚动时域 $H_\infty$ /广义 $H_2$ 控制方法.....	29
4.2.2 滚动时域 $H_\infty$ /广义 $H_2$ 悬架控制器设计.....	34

4.2.3	仿真分析 .....	35
4.3	离线优化的滚动时域 $H_\infty$ /广义 $H_2$ 主动悬架.....	38
4.3.1	离线优化的滚动时域 $H_\infty$ /广义 $H_2$ 控制方法 .....	39
4.3.2	离线优化的滚动时域 $H_\infty$ /广义 $H_2$ 悬架控制器设计 .....	42
4.3.3	仿真分析 .....	43
4.4	实验结果分析.....	46
4.5	本章小结 .....	47
<b>第5章</b>	<b><math>H_\infty</math>/广义<math>H_2</math>静态输出反馈控制主动悬架</b>	<b>49</b>
5.1	$H_\infty$ /广义 $H_2$ 静态输出反馈控制方法 .....	49
5.2	主动悬架控制器设计 .....	53
5.3	仿真结果分析.....	53
5.4	实验结果分析.....	54
5.5	本章小节 .....	55
<b>第6章</b>	<b>全文总结与展望</b>	<b>57</b>
6.1	全文总结 .....	57
6.2	工作展望 .....	57
	<b>参考文献</b>	<b>59</b>
	<b>作者简介及研究成果</b>	<b>67</b>
	<b>致谢</b>	<b>69</b>

# 第1章 绪论

## 1.1 悬架系统概述

汽车在恶劣的路面行驶时会产生剧烈的振动，严重影响到驾驶员及乘客的舒适性甚至会威胁到行车安全。汽车悬架系统是对车辆起降振、隔振的主导因素。

汽车悬架是汽车的一个结构连接系统，用于连接车桥（或车轮）、车架和车身<sup>[1]</sup>。汽车悬架的一般组成为：弹簧、减振器（阻尼元件）和导向机构等<sup>[2]</sup>，如图1.1所示。弹簧的作用是承受并传递作用在车辆上的垂直载荷，确保车身和车轮之间完好的弹性连接，保证轮胎与地面的接触。减振器能够利用自身的压缩变形来吸收汽车振动的能量，从而抑制车身振动。导向机构的作用是通过传递作用力和力矩以及它们的作用方向，使得汽车无论是在颠簸路段还是平稳路段都能具备正确的运动轨迹。然而，随着行车道路状况的变化，车辆的乘坐舒适性和安全性对悬架系统特性的要求也变得不同。如果要降低车辆行驶过程中的颠簸感，就需要悬架系统的弹簧刚度小一点，即需要悬架“偏软”一些；另外，车辆的行驶稳定性和操控安全性同样是需要重视的问题，这需要悬架阻尼和弹簧刚度都大一些，则需要采用“偏硬”的悬架，减小轮胎与车身之间的相对距离，从而达到理想的路面附着与支撑效果。由此可以看出，车辆的乘坐舒适性和操控安全性本身就是相互矛盾的。因此，如何设计出能够同时解决汽车乘坐舒适性和操纵稳定性的车辆悬架就显得非常重要。

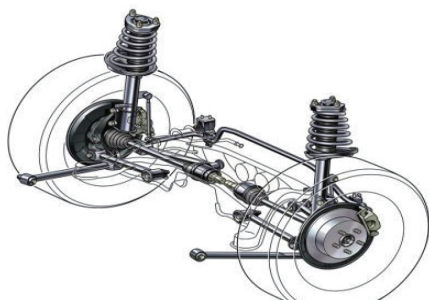


图 1.1 车辆悬架主要组成示意图

汽车悬架根据是否具有控制功能可分为被动悬架和主动悬架，可控悬架从是否具有功率输出的角度可进一步分为主动悬架和半主动悬架<sup>[3, 4]</sup>。

被动悬架系统各组成部件的参数都是确定的，当受到外界载荷的作用时只能按照最初的设计被动地做出反应，而不能根据汽车行进过程中的实时状况及时做出改变。被动悬架只有在一定的外部干扰以及特定的参数下才能够保证其性能的最大化，一旦遇到道路情况发生变化就无法再发挥出最好的效果，不能够时刻调整其性能以改善汽车的减振特性，所以，被动悬架对于汽车而言是有一定的局限性的。

随着电子技术的迅速普及和发展，人们对车辆性能的要求越来越高，为了提高汽车悬架的乘坐舒适性和行驶安全性，解决被动悬架系统不能根据路面状况变化而进行调整的缺陷，主动悬架系统及其控制技术的相关研究受到越来越多的关注，并开始逐步应用到实际当中。

半主动悬架一般由空气弹簧及可调阻尼器等装置构成，在车辆平顺性和行驶安全性之间不断寻求妥协。半主动悬架阻尼器可根据阻尼特性调节方式不同分为节流阀式阻尼器、磁流变式阻尼器和电流变式阻尼器<sup>[5]</sup>。由于阻尼器阻尼连续可变，系统响应速度快，能够有效改善车辆悬架性能，在工作时几乎不消耗发动机的功率，而且结构相对简单，产品价格低廉，因此半主动悬架得到越来越广泛的应用。但是，由于半主动悬架不能主动输出作动力，因而在一定程度上限制了进一步改善车辆悬架性能的能力。

相比其他类型的悬架，主动悬架的组成部件除了弹簧和阻尼元件以外，还有其特有的控制系统和作动器（即力发生器），其中作动器又可以包括液压缸、气压缸、伺服电机、电磁机构等。主动悬架可根据行驶工况的变化主动地改变作用于车身和车轮之间的相互作用力以抑制车身振动，工作原理为：通过传感器实时采集轮胎及车身姿态并且将采集到的信息传递给悬架控制系统，控制器经过对收到的信息进行分析处理后向作动器发出指令，使作动器可以产生一个与汽车行驶状态相匹配的力，实时调节使得主动悬架达到最佳的减振效果。相较于调节阻尼器阻尼特性的半主动悬架，主动悬架具有更大的灵活性，能在舒适性和行驶安全性之间寻求更佳的妥协<sup>[6]</sup>，能够处理其他类型的悬架处理不了的工况。主动悬架不但能实时改变作动力，使悬架时刻都能达到最佳性能，而且能在一定程度上控制车身的运动，改善车辆的动力学性能和调节车身状态，是当今汽车悬架产业发展的重要方向。

控制算法是主动悬架研究的核心，是使主动悬架能够实现理想减振的有效手段。国内外学者在主动悬架控制方法的研究方面作了大量的理论工作，通过对悬架系统的深入研究，科研工作者以及企业研发人员对悬架系统的进一步发展也充满了期望。因此设计出能够使车辆系统达到最佳性能的控制策略对主动悬架系统的发展具有十分重要的意义。



## 1.2 主动悬架控制策略研究现状

主动悬架性能的优良与自身的控制系统有着直接的关系，好的控制器能够使得主动悬架发挥出最佳的效果，因此，控制器的优良与否决定着主动悬架减振效果的好坏。自主动悬架的概念被提出以来，国内外学者不断对主动悬架控制方法进行研究探索，随着控制理论的研究与发展，已经演变出多种不同的交叉、互补的控制理论。主动悬架的控制策略主要包括最优控制、滑模变结构控制、自适应控制、神经网络控制、模糊控制等<sup>[3]</sup>。

### (1) 最优控制

最优控制作为现代控制理论的核心方法，无论是在主动还是半主动悬架的控制中都得到了极大程度的应用<sup>[7-10]</sup>，其中半主动悬架控制中的“天棚阻尼控制”就是线性最优控制(LQG)的一个典型应用<sup>[11-13]</sup>。文献[14]将LQG应用于汽车主动悬架中，根据悬架性能指标的均方根值来评价悬架的性能，通过与被动悬架在相同条件下进行仿真对比，主动悬架很大程度地优于被动悬架。文献[15]基于确定的主动悬架物理模型，采用线性最优控制方法来控制车身的运动，并通过仿真结果验证了线性最优控制的有效性。同济大学吴光强建立了考虑人体坐姿的车辆动力学模型，设计了一款主动悬架最优控制器，较大程度地改善了汽车的舒适性<sup>[16]</sup>。最优控制的悬架系统中，权系数决定着悬架的性能倾向，满意的控制性能往往需要通过反复调整加权系数来实现。近年来许多学者对这一不足进行了大量的研究，文献[17]根据悬架动行程的变化自适应调整LQR的权重系数，求取新的LQR控制律，并将新的控制律与之前的控制律进行对比。文献[18-20]针对主动悬架中LQG控制器的权系数依赖于先验知识的缺点，提出了利用粒子群优化算法良好的快速寻优能力对权矩阵参数进行实时优化。利用LQG控制求得的作动力是在一定的路面条件下得到的，一旦路面条件改变，该作动力将不是最优解，且在模型摄动的情况下LQG控制基本不具备鲁棒性。

### (2) 自适应控制

自适应控制技术具有参数辨识功能，可以通过自行调节相关参数以适应被控对象以及某些元器件特性的改变，从而保证系统的性能指标。自适应控制的工作原理是根据对象当前的输入输出情况，不断地辨识模型参数，并从预先设计并保存在计算机的数据中选择最符合当前状况的参数，对系统进行控制<sup>[21]</sup>。文献[22]通过构造时变屏障Lyapunov函数来设计主动悬架虚拟容错控制器和自适应律，确保车辆和速度不违反约束边界并达到快速容错的目的。文献[23]针对具有参数不确定性和输入饱和约束的非线性主动悬架系统，采用一种基于神经网络的自适应控制方法，并通过仿真表明该设

计方案对主动悬架具有较好的控制效果。文献[24]提出了一种半主动悬架模型参考自适应控制策略来自适应调整磁流变阻尼器的阻尼系数,结果表明该控制策略能够有效地抑制磁流变阻尼器建模误差,实现磁流变阻尼器对期望阻尼系数的自动跟随,保证驾驶的舒适性和稳定性。自适应控制最大的优点是能够在外部条件改变后不断地寻求新的解,缺点是其鲁棒性难以保证。

### (3)滑模变结构控制

变结构理论在上世纪五十年代末由苏联科学家开始研究,后来苏联学者V. I. Utkin对变结构理论体系和框架进行了详细的说明,并提出了滑动模态变结构控制方法<sup>[25]</sup>。二十世纪末,我国的高为炳院士首先提出了趋近律和自由递阶的概念,使得滑模控制方法有了进一步的发展<sup>[26]</sup>。滑模控制在控制过程中有较强的鲁棒性,具体表现为滑模控制使系统沿着滑模面进行,当系统受到扰动时,系统状态仍保持不变。由于具有较强的鲁棒性,滑模控制在悬架系统中得到了大量的应用。文献[27]针对半车主动悬架系统设计了滑模控制器,该滑模控制器不仅能够抑制高频抖振,而且对执行器的不确定性具有很强的鲁棒性。文献[28]针对配备液压执行器的非线性主动悬架系统,提出一种采用滑模控制器的鲁棒约束输出反馈控制方法,制定了包含一阶滑模控制的非线性控制律来调节液压阀,从而提供主动控制作用。文献[29]考虑了不确定主动车辆悬架系统的事件触发滑模控制问题,主要目的是开发一种滑模控制器可以在一定约束条件下保证悬架系统的渐近稳定性和 $H_\infty$ 性能,仿真结果表明了所设计的控制方法具有非常大的可行性。理想状态下的滑模控制会使系统平稳地趋近于原点,但是实际系统中存在时间滞后和状态测量的误差等影响因素会使得控制过程中发生抖振现象。

### (4)智能控制

经典的控制算法和现代控制理论都需要精确的模型作为基础,但在实际系统中,存在很多无法精确建模的非线性特征以及不确定性因素,因此研究人员逐渐将目光转向智能控制。近年来,国内外很多研究学者针对智能控制包括神经网络控制和模糊控制等在主动悬架和半主动悬架上的应用做了许多研究,通常是两种或者几种控制算法结合使用<sup>[30, 31]</sup>。文献[32]针对电磁主动悬架系统设计了基于神经网络的自适应事件触发控制,采用径向基函数神经网络近似未知项,利用神经网络基函数的特殊特性解决了代数环问题。文献[33]基于具有时变垂直位移和速度约束且车身质量未知的主动悬架系统,利用神经网络近似不确定的车身质量,设计了自适应神经网络控制方案。应用神经网络通常需要更多的数据,而且目前神经网络的研究中仍存在问题有待进一步的研究。文献[34]通过设计不同的模糊规则集和隶属度函数来验证规则集数量和隶属度函数类型对主动悬架性能和控制效果的影响。文献[35]针对具有全状态约束的主动悬架系统,基于Lyapunov稳定性理论提出了一种模糊自适应最优控制方案,设计的模糊

逻辑系统实现了对于未知非线性动力学的学习。文献[36]提出了一种新的模糊综合优化控制方法，利用适应度函数选择车体的垂直和滚动振动加速度作为综合控制目标，并将其应用于半车主动悬架系统，数值分析为所提出的控制方案提供了有力的支持。模糊控制不依赖于悬架系统的精确数学模型，但模糊控制的设计目前尚缺乏系统性，完全凭经验进行，且如何保证模糊控制系统的稳定性问题还有待解决。

### (5)鲁棒控制

鲁棒技术的发展为车辆悬架的控制提供了新的发展方向，国内外悬架鲁棒控制的研究上取得了一系列的结果和方法。鲁棒控制能够从根本上解决系统存在模型不确定性、测量噪声和外界干扰作用下的控制问题。鲁棒控制中的 $H_\infty$ 控制和 $H_\infty/H_2$ 混合控制在主动悬架系统中应用较多<sup>[37-42]</sup>，这是因为 $H_\infty$ 控制可以精确全面地处理非结构不确定性，对悬架模型不确定性的容忍程度较好。由于线性矩阵不等式(LMI)技术可方便地处理系统的多目标问题且无需选择加权矩阵，近年来被广泛应用于主动悬架控制系统中<sup>[43-46]</sup>。LMI处理多目标问题的方法是将系统的多个性能要求归结为约束条件的最优控制问题统一处理，缺点是控制器在系统运行过程中固定不变，只有在路面干扰满足一定的条件下才能取得满意的控制效果，大扰动下系统往往违背约束。为了使控制器能够根据系统状态实时调整控制性能，文献[47-51]研究了基于LMI方法的滚动优化 $H_\infty$ 控制器，在系统运行的每个采样时刻在线求解控制器，大扰动下降低性能保证约束条件满足，小扰动下提高控制性能。然而由于在每个时刻均需求解LMI优化问题，计算负担大大增加，而且控制器求解时间较长，这阻碍了滚动优化控制方法在实际悬架中的应用。因此，设计出既能够调节控制性能和系统约束的矛盾，而且能够加快控制器求解速度、降低在线计算负担的控制器是非常有意义的。

## 1.3 悬架控制的特点

汽车悬架在协调汽车行驶平顺性和操纵稳定性中扮演着重要的角色，设计悬架时需要考虑的性能条件有：

(1) 从行驶平顺性（乘坐舒适性）方面来讲，须最大程度地降低路面激励对汽车造成的颠簸和振动，给乘客最舒适的感受；

(2) 从操作稳定性（行驶安全性）角度考虑，为了保持轮胎与路面的良好接触，最大限度减少轮胎动载荷保证轮胎与地面良好的附着性；

(3) 从悬架物理结构方面考量，为避免悬架碰撞到限位块，悬架动行程要限制在一定范围之内；

(4) 从执行机构的物理饱和约束方面考虑，且为了提高悬架的控制效果，力发生器

的输出力不允许超出最大界限<sup>[52]</sup>;

(5) 尽量确保汽车无论是在刹车、转弯还是加速等工况下都能够平稳运行, 具有良好的车身姿态;

以上提到的这些悬架性能都需要受到重视, 但它们之间又相互联系、制约、冲突和矛盾。比如, 从某方面来讲, 降低车身加速度会使乘车舒适度提高, 但也会使悬架动行程变大, 从而恶化车身姿态控制; 提高轮胎接地性, 会增加悬架动行程, 同时也会造成车身加速度的增加; 悬架与限位块发生碰撞会导致轮胎接地性以及操纵稳定性降低。所以, 在进行主动悬架的设计时, 一定要尽可能全面的考虑所有问题和指标, 最大程度地提高悬架整体性能<sup>[53-55]</sup>。

## 1.4 本文的研究内容

从现有的文献资料来看, 目前主动悬架系统在实际应用中存在以下几个问题:

(1) 许多研究采用LMI方法处理主动悬架系统的多目标控制问题, 一次性设计好的控制方法使系统无法在系统约束与性能之间做到同时兼顾, 即当扰动满足一定的条件时, 设计的闭环系统通常能够很好的满足系统约束; 但当大扰动作用于系统时, 却常常导致违背系统约束。

(2) 虽然采用滚动优化控制能够实时协调系统的控制性能和系统约束, 但这种滚动控制在每个时刻均需求解一组LMI优化问题, 不仅在线计算负担重, 而且求解控制器耗时长, 在实际应用中, 有可能当前时刻的控制量还没有解算出来, 系统已经运行到下一时刻了。

(3) 目前大部分控制方法均是基于状态反馈的, 但在实际系统中难以应用状态反馈对系统进行控制, 这是因为系统的状态往往并不能全部直接测量, 即使可以测量, 也需要较多的传感器或复杂的观测器, 造成实施成本增大、系统可靠性降低。因此, 输出反馈在实际应用有着更加重要的意义。

针对以上研究中存在的问题, 本文以满足主动悬架系统各种约束和提高乘坐舒适性为目标, 研究并设计主动悬架控制器, 主要研究内容及相应的章节如下:

第一章 绪论。详述课题的研究背景及意义, 对悬架控制策略的研究现状进行论述, 分析主动悬架控制的特性以及当前研究中存在的问题。

第二章 主动悬架系统。首先建立路面干扰的模型, 分别是随机路面干扰和确定性路面干扰, 然后建立了1/4车二自由度主动悬架振动模型, 接着给出悬架的评价指标, 最后对控制问题进行描述。

第三章 主动悬架硬件在环实验平台。首先介绍主动悬架硬件在环实验平台的硬件组成和软件构成，最后阐述主动悬架硬件在环实验平台的工作原理。

第四章 离线优化的滚动时域 $H_\infty$ /广义 $H_2$ 控制主动悬架。首先介绍线性矩阵不等式的基础知识，接针对1/4车主动悬架设计离线优化的滚动时域 $H_\infty$ /广义 $H_2$ 控制器，并与滚动时域 $H_\infty$ /广义 $H_2$ 控制算法进行对比，结合仿真和实验结果，验证控制器的有效性。

第五章  $H_\infty$ /广义 $H_2$ 静态输出反馈控制主动悬架。针对主动悬架系统的状态不能全部被直接测量的问题，设计了1/4车主动悬架 $H_\infty$ /广义 $H_2$ 静态输出反馈控制器，实验结果表明在一定的路面干扰下可以获得满意的控制效果。

最后对全文研究内容进行了总结，并针对目前研究中存在的问题对未来的工作做出了展望。



## 第2章 主动悬架系统

为了更好地研究主动悬架的控制问题，同时给主动悬架控制策略提供一个仿真和实验研究平台，本章主要讨论车辆悬架系统的物理特性。首先针对整个车辆悬架系统，分析并建立了路面干扰输入模型，包括随机路面和确定性路面，然后建立了1/4车辆二自由度悬架振动模型，接着讨论了悬架系统设计时主要考虑的性能评价指标，最后进行了主动悬架控制问题描述。

### 2.1 路面输入模型

路面不平度干扰是悬架动态模型的输入，合理的路面干扰输入模型与车辆模型同等重要，在设计悬架控制系统前需要建立路面干扰输入模型。一般路面干扰可分为随机路面干扰输入和确定性路面干扰输入。随机路面没有明确的数学表达式，表述汽车行驶在普通路面上的路面激励；确定性路面干扰可由具体函数表示，是具有脉冲或阶跃作用的扰动信号，由路上的凸块或凹坑产生，如减速带、水坑等。

#### 2.1.1 随机路面输入

将路面距基准水平面的垂直距离设为 $x_r$ ， $x_r$ 沿水平距离方向的变化如图2.1所示。由于不同路段的路面崎岖凹凸程度不同，路面轮廓曲线也不会完全相同，因此一般采用路面功率谱密度 $G_{x_r}(n)$ 来刻画随机路面。

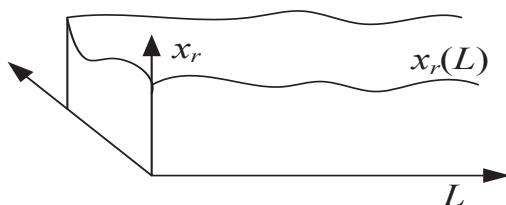


图 2.1 路面不平度曲线

国际标准ISO 8608(1995)和国家标准GB 7301-86建议路面功率谱密度的拟合表达式

为:

$$G_{x_r}(n) = G_{x_r}(n_0) \left( \frac{n}{n_0} \right)^{-w_0} \quad (2.1.1)$$

式中 $G_{x_r}(n_0)$ 为参考空间频率下的谱密度, 单位是 $m^2/m^{-1} = m^3$ ;  $n$ 是空间频率, 单位为 $m^{-1}$ ;  $n_0$ 为参考空间频率, 一般取值为 $n_0 = 0.1m^{-1}$ ;  $w_0$ 为频率指数, 它决定着路面功率谱密度的频率结构, 其数值范围是1.6 – 2.4, 本论文中取 $w_0 = 2$ 。

根据路面功率谱密度把路面不平度分为8级<sup>[56]</sup>, 如表2.1所示, 表中 $\sigma_{x_r}$ 表示路面不平度均方根值的几何平均值。

**表 2.1 路面等级信息**

路面等级	$G_{x_r}(n_0) / (10^{-6}m^3)$ $n_0 = 0.1m^{-1}$			$\sigma_{x_r} / (10^{-3}m^3)$ $0.011m^{-1} < n < 2.83m^{-1}$
	下限	几何平均值	上限	几何平均值
A	8	16	32	3.81
B	32	64	128	7.61
C	128	256	512	15.23
D	512	1024	2048	30.45
E	2048	4096	8192	60.90
F	8192	16384	32768	121.80
G	32768	65536	131072	243.61
H	131072	262144	524288	487.22

路面不平度垂直位移输入可由谱密度为 $2\pi n_0 \sqrt{G_{x_r}(n_0)} v$ 的白噪声通过积分产生, 设路面随机位移输入为 $x_r$ , 则随机路面不平度时域模型可描述为:

$$\dot{x}_r(t) = 2\pi n_0 \sqrt{G_{x_r}(n_0)} v w(t) \quad (2.1.2)$$

其中 $w(t)$ 是均值为零、强度为1 (单位均方根值) 的高斯分布白噪声。

在MATLAB环境下, 以标准规定的C级路面( $G_{x_r}(n_0) = 2.56 \times 10^{-6}m^3$ )为例, 分别生成车速 $v = 30km/h$ 和车速 $v = 60km/h$ 的随机路面高度历程, 如图2.2所示。

### 2.1.2 确定性路面输入

确定性路面输入是指汽车驶过凸块或凹坑时产生的冲击性信号, 这种信号具有偶



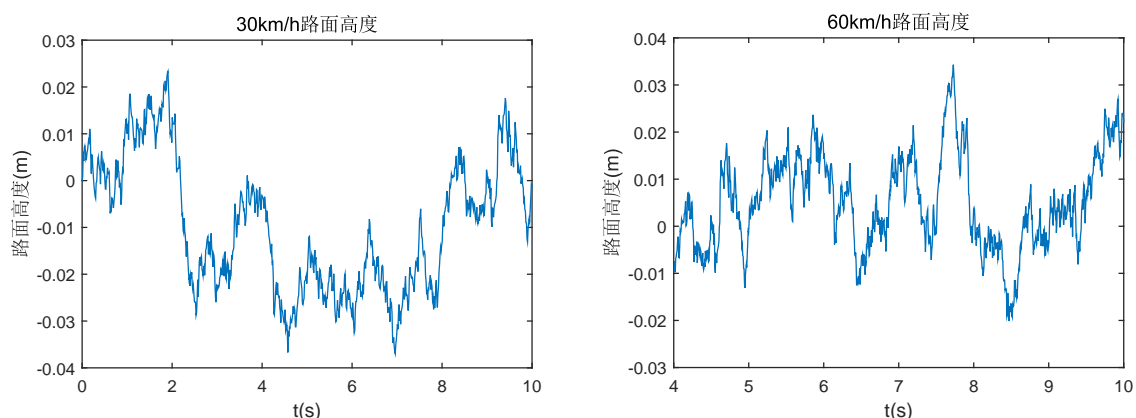


图 2.2 随机路面高度历程

然性、短时性和高强度性，可看做脉冲信号。汽车在路面行驶，通过凸块或凹坑时往往引起强烈的振动，驾驶员和乘客也会感到明显的振感，通过车速越快振动越剧烈。本文采用减速带路面（常坡型单凸块）作为确定性路面输入，如图2.3所示为减速带路面，图2.4所示为路面长坡形单凸块轮廓。



图 2.3 减速带路面

考虑构造如下式(2.1.3)所示的函数来描述减速带路面：

$$x_r(t) = \begin{cases} \frac{A_m}{2} (1 - \cos \frac{2\pi v}{L} t), & 0 \leq t \leq \frac{L}{v} \\ 0, & t > \frac{L}{v} \end{cases} \quad (2.1.3)$$

式中 $A_m$ 和 $L$ 分别表示凸块的高度和长度，取值为 $A_m = 0.1m$ ， $L=5m$ ， $v$ 表示汽车的行驶速度， $t$ 表示时间。对应的路面垂直速度输入由式(2.1.4)给出。

$$\dot{x}_r(t) = \begin{cases} \frac{\pi v A_m}{L} \sin \left( \frac{2\pi v}{L} t \right), & 0 \leq t \leq \frac{L}{v} \\ 0, & t > \frac{L}{v} \end{cases} \quad (2.1.4)$$

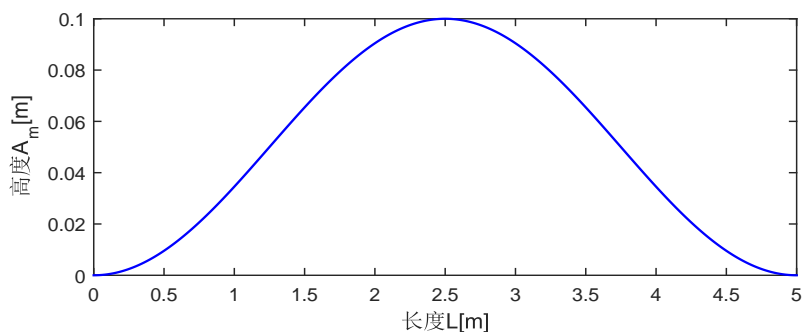


图 2.4 路面长坡形单凸块轮廓

## 2.2 悬架系统建模

四分之一车辆模型是悬架设计中最基础的也是最常见的模型，能够很好地用来研究悬架最基本的特性。相比于复杂的车辆模型如半车模型、全车模型来说，四分之一车辆模型结构简单，包含的车辆参数少，易于理解与分析。

### 1. 被动悬架模型

1/4车辆被动悬架二自由度振动模型模型如图2.5所示，该模型将轮胎简化为一个弹性元件，悬架简化为弹簧和阻尼器。模型中 $m_s$ 为车身质量（簧载质量）； $m_u$ 为车轮质量（非簧载质量）； $k_s$ 为悬架弹簧刚度； $c_s$ 为阻尼器阻尼系数； $k_u$ 为轮胎刚度； $x_s$ 为簧载质量垂直位移； $x_u$ 为非簧载质量垂直位移； $x_r$ 为路面垂直位移输入，是悬架系统的干扰输入。

被动悬架动力学微分方程如式如下：

$$\begin{cases} m_s \ddot{x}_s = -c_s (\dot{x}_s - \dot{x}_u) - k_s (x_s - x_u) \\ m_u \ddot{x}_u = c_s (\dot{x}_s - \dot{x}_u) + k_s (x_s - x_u) - k_u (x_u - x_r) \end{cases} \quad (2.2.1)$$

选择状态变量为 $x = [x_s - x_u \quad \dot{x}_s \quad x_u - x_r \quad \dot{x}_u]^T$ ，则由式(2.2.1)可得二自由度1/4车被动悬架的状态空间方程：

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -\frac{k_s}{m_s} & -\frac{c_s}{m_s} & 0 & \frac{c_s}{m_s} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_s}{m_u} & \frac{c_s}{m_u} & -\frac{k_u}{m_u} & -\frac{c_s}{m_u} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \dot{x}_r(t) \quad (2.2.2)$$

其中 $\dot{x}_r(t)$ 为路面垂直速度输入。

### 2. 主动悬架模型

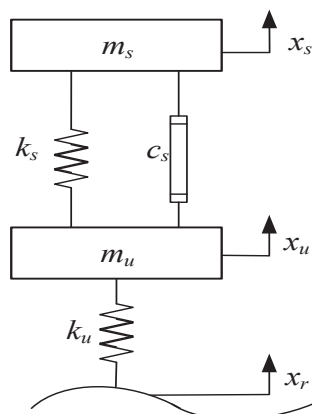


图 2.5 1/4车被动悬架模型

本文主动悬架模型采用作动器与被动悬架并联的方式，如图2.6所示。主动悬架的动力学模型由如下微分方程描述：

$$\begin{cases} m_s \ddot{x}_s + c_s (\dot{x}_s - \dot{x}_u) + k_s (x_s - x_u) = u \\ m_u \ddot{x}_u - c_s (\dot{x}_s - \dot{x}_u) - k_s (x_s - x_u) + k_u (x_u - x_r) = -u \end{cases} \quad (2.2.3)$$

其中 $u$ 为力控制输入（作动力）。

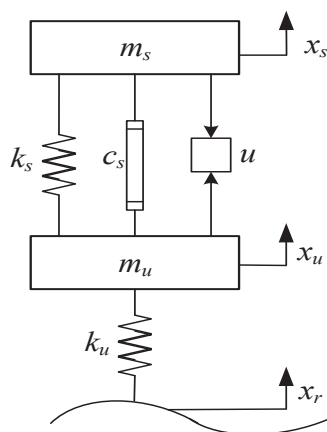


图 2.6 1/4车主动悬架模型

选择状态向量为 $x = [x_s - x_u \quad \dot{x}_s \quad x_u - x_r \quad \dot{x}_u]^T$ ，则由式(2.2.3)可知，1/4车二自由度主

动悬架的状态空间方程可描述为:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -\frac{k_s}{m_s} & -\frac{c_s}{m_s} & 0 & \frac{c_s}{m_s} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_s}{m_u} & \frac{c_s}{m_u} & -\frac{k_u}{m_u} & -\frac{c_s}{m_u} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \dot{x}_r(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_s} \\ 0 \\ -\frac{1}{m_u} \end{bmatrix} u(t) \quad (2.2.4)$$

式(2.2.4)中路面垂直速度输入 $\dot{x}_r(t)$ 可表示为(参见式(2.1.2))

$$\dot{x}_r(t) = 2\pi n_0 \sqrt{G_{x_r}(n_0)} v w(t)$$

因此1/4车主动悬架系统的状态空间描述还可以表达为

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -\frac{k_s}{m_s} & -\frac{c_s}{m_s} & 0 & \frac{c_s}{m_s} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_s}{m_u} & \frac{c_s}{m_u} & -\frac{k_u}{m_u} & -\frac{c_s}{m_u} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2\pi n_0 \sqrt{G_{x_r}(n_0)} v \\ 0 \end{bmatrix} w(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_s} \\ 0 \\ -\frac{1}{m_u} \end{bmatrix} u(t) \quad (2.2.5)$$

## 2.3 悬架系统性能评价

悬架系统的整体设计中需要主要考虑性能评价指标有:乘坐舒适性、悬架动行程和操纵稳定性,通常根据其均方根值来评价悬架系统性能的优劣。

### 1. 乘坐舒适性

乘坐舒适性(行驶平顺性)是指驾驶员和乘客对车身垂直振动的舒适度,可由车身垂直加速度 $\ddot{x}_s$ 作为客观评价指标,车身垂直加速度越大乘客感到越颠簸,目前大部分文献中采用垂直加速度均方根值来描述乘坐舒适性。

$$RMS(\ddot{x}_s) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |\ddot{x}_s|^2}$$

### 2. 悬架动行程

悬架动行程是指车身与车轮的相对位移,其值如果超过范围将会撞击限位块,不仅会使得乘坐舒适性大大降低,而且导向机构的作用下,还会影响操纵稳定性。另外,悬架剧烈地拉伸和压缩将加速阻尼器和弹簧的损耗,这将降低悬架的寿命,影响悬架的性能。因此,设计悬架时要求将悬架动行程限制在一定的范围内变化。

### 3. 操纵稳定性

操纵稳定性也被称为轮胎的接地性,也即轮胎与地面的附着能力。当轮胎的动载荷大于轮胎静载荷时,轮胎不能与地面保持良好的接触,车辆不能从轮胎获得足够的

侧向力和纵向力，将会出现轮跳或打滑现象，非常不安全。所以，为了保证轮胎的接地性和车轮的寿命，要求轮胎的动载荷小于轮胎静载荷。

## 2.4 控制问题描述

车辆乘坐舒适性是设计悬架系统时首先要考虑的要求，由上一节的讨论可知车身垂直加速度 $\ddot{x}_s$ 是评价车辆乘坐舒适性的客观评价指标，由式(2.2.3)可得

$$\ddot{x}_s = \begin{bmatrix} -\frac{k_s}{m_s} & -\frac{c_s}{m_s} & 0 & \frac{c_s}{m_s} \end{bmatrix} x + \frac{1}{m_s} u$$

由上一节的讨论可知，悬架动行程 $x_s - x_u$ 应当限制在某一给定范围内以避免撞击限位块，即

$$|x_s - x_u| \leq S_{\max} \quad \text{或} \quad \frac{|x_s - x_u|}{S_{\max}} \leq 1$$

其中 $S_{\max}$ 表示悬架最大动行程。

操纵稳定性要求车辆行驶时轮胎始终附着地面，即轮胎与路面间的动载荷 $k_u(x_u - x_r)$ 必须小于静载荷 $(m_s + m_u)g$

$$k_u(x_u - x_r) < (m_s + m_u)g \quad \text{或} \quad \frac{k_u(x_u - x_r)}{(m_s + m_u)g} < 1$$

另外，由于输出饱和，执行机构只能产生有限的作动力，即

$$|u| \leq u_{\max} \quad \text{或} \quad \frac{|u|}{u_{\max}} \leq 1$$

其中 $u_{\max}$ 表示执行机构能产生的最大的作动力。

经过上述分析可知，主动悬架控制问题是一个存在时域硬约束（悬架动行程、车轮接地性、执行机构饱和）的干扰抑制问题，主动悬架的控制目标可分为以下两个部分：

- (1) 提高乘坐舒适性。从路面干扰输入到车身垂直加速度输出的响应越小越好；
- (2) 时域硬约束条件得到满足。时域约束输出并不要求越小越好，只需从路面干扰输入到悬架动行程 $x_s - x_u$ 、轮胎动静载荷比 $\frac{k_u(x_u - x_r)}{(m_s + m_u)g}$ 、主动力 $u$ 的时域输出响应分别保持在允许范围内。

基于上面的讨论，在多目标控制的框架下将系统输出划分为性能输出和约束输出，定义主动悬架控制系统的性能输出为 $z_1$ ，约束输出为 $z_2$

$$z_1 = \ddot{x}_s, \quad z_2 = \left[ \frac{x_s - x_u}{S_{\max}} \quad \frac{k_u(x_u - x_r)}{(m_s + m_u)g} \quad \frac{u}{u_{\max}} \right]^T$$

其中 $z_2$ 中的各项约束已归一化。



## 第3章 主动悬架硬件在环实验平台

由于在纯数值仿真中可能会忽略实际系统的某些特性和参数，因此通过纯数值仿真的方法验证可行的控制器在实际系统的实时控制中可能达不到预期的控制效果，甚至不能使用。为验证本文设计的控制器在实际系统中仍然能够达到理想的控制效果，本章引入主动悬架硬件在环实验平台。本章结构如下：首先详细阐述主动悬架硬件在环实验平台各单元的硬件结构组成，接着介绍主动悬架硬件在环实验平台的软件构成，最后介绍主动悬架硬件在环实验平台的工作原理。

硬件在环实验平台系统将计算机作为控制器，实现对数据的采集与处理以及算法实现等功能，将实际的被控对象（主动悬架）作为实物放在控制回路中构成闭环控制。本文研究使用的主动悬架硬件在环实验平台是由加拿大Quanser公司研发的一套完整的硬件在环实验平台。

### 3.1 主动悬架硬件在环实验平台硬件组成

主动悬架硬件在环实验平台的硬件部分主要包括主动悬架实验台（控制对象）、数据采集板、功率放大器、传感器和计算机。

#### 3.1.1 主动悬架实验台

主动悬架实验台由钢制成，是一种台式模型，用来模拟四分之一车主动悬架，该实验台是按比例缩放的四分之一车结构，如图3.1所示。实验台由三个互相叠放的质量板组成，即顶板（蓝色）、中间板（红色）和底板（银色），每块板都可以沿着垂直的不锈钢轴上下运动，板与板中间通过弹簧支撑。顶板用来模拟支撑在悬架上方的车身，也就是簧载质量，中间板模拟汽车的轮胎，即非簧载质量，底板的上下运动模拟路面起伏，为主动悬架系统提供道路激励。顶板与一个直流电机通过绞盘相连，该电机是主动悬架控制系统的执行机构，即力发生器（作动器）；顶层装有加速度计，以测量车身相对于地面的垂直加速度；底板连接有快速响应的直流电动机，可以模拟不同的道路激励，电机旋转时，在输出轴上产生的扭矩通过丝杠和齿轮传动装置转换为线性力，从而带动底板运动；底板和中间板的垂直位移由两个高分辨率光学编码器直接跟踪，第三个编码器测量顶板相对于中间板的垂直运动（即悬架动行程）。

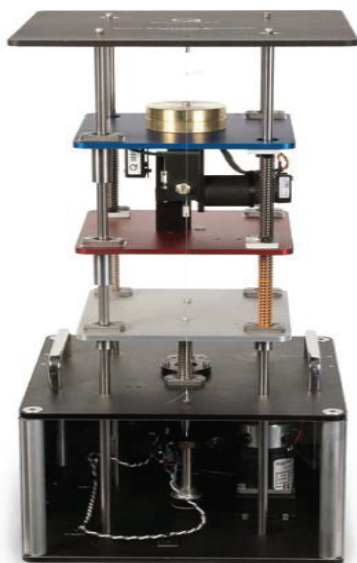


图 3.1 主动悬架实验台

下面对主动悬架实验台重要的部件进行详细描述。

### 1. 悬架直流电动机

主动悬架实验台安装了型号为3863H048C的Faulhaber无刷直流电动机，与常规的直流电动机相比，它可以获得更快的响应速度。该电动机是主动悬架的作动器，根据主动悬架控制器发出的指令产生作用于车身和轮胎之间的相互作用力以抑制车身振动。

### 2. 底板有刷伺服电动机

主动悬架实验台中带动底板运动从而模拟路面位移输入的电机采用的是美国Magmotor公司生产的直流有刷伺服电机（S23-100系列），该电动机通过齿轮和齿轮传动装置连接到丝杠，丝杠将电动机的旋转运动转换为底板的线性运动。

主动悬架实验台参数见表3.1。

## 3.1.2 传感器

### 1. 位移传感器

主动悬架实验台安装有三个位移传感器，采用的是美国US Digital编码器，分别是测量顶板垂直运动位移的顶板编码器、测量悬架动行程的悬架编码器和测量底板垂直运动位移的底板编码器，均是高分辨率正交光学编码器。



表 3.1 主动悬架实验台参数

参数	符号	数值	参数	符号	数值
簧载质量	$m_s$	2.45 kg	非簧载质量	$m_u$	1 kg
悬架阻尼	$c_s$	7.5 N.s/m	悬架刚度	$k_s$	900 N/m
轮胎刚度	$k_u$	2500 N/m	最大作动力	$u_{\max}$	35 N
最大动行程	$S_{\max}$	0.038 m	底板最大位移	$X_{\max}$	0.036 m

## 2. 加速度传感器

ADXL210E是一款低成本、低功耗的双轴加速度计，安装在顶板下方，可以在 $\pm 10g$ 的满量程范围内测量车身沿垂直方向的加速度。

### 3.1.3 数据采集卡

主动悬架硬件在环实验平台采用的数据采集卡是由Quanser公司研发的Q8-USB数据采集卡，如图3.2所示。该数据采集卡拥有可靠的实时性能、采样速率快，且提供多种输入输出通道。Q8-USB数据采集卡一端连接计算机另一端与功率放大器相连，一方面用于将计算机产生的模拟控制量和路面输入位移输出到功率放大器，另一方面负责将位移传感器信号和加速度传感器信号送入计算机中。

### 3.1.4 功率放大器

如图3.3所示Quanser公司的AMPAQ-L2功率放大器是一款线性电流放大器，在主动悬架实验平台中，AMPAQ-L2功率放大器的作用是驱动悬架直流电动机和有刷伺服电动机的驱动器。实验过程中AMPAQ-L2功率放大器一端连接到Q8-USB数据采集卡的模拟输出，另一端与底板电动机接口和悬架电动机接口相连。

## 3.2 主动悬架硬件在环实验平台软件构成

主动悬架硬件在环实验平台的软件系统是基于Quanser公司最新一代快速建模实时控制软件QUARC系统，能够无缝集成于MATLAB/Simulink。Simulink虽然具有强大的图形建模仿真优势，但缺少实时控制系统的外部实物接口模块，利用QUARC软件



图 3.2 Q8-USB数据采集卡 图 3.3 AMPAQ-L2功率放大器

和Simulink相结合的混合编程方案，用户可以在Simulink中搭建仿真模型和控制器，然后通过QUARC自动生成实时代码，对硬件平台的信息进行采集，不需要任何硬件编码即可自动实时运行。使用QUARC软件，在Simulink中搭建的仿真系统可被转化成能够在许多目标处理器和操作系统组合上运行的实时代码，控制参数可在代码运行时修改，方便快速设计、反复测试和诊断而不需要重新编译。

### 3.3 主动悬架硬件在环实验平台工作原理

主动悬架硬件在环实验台是基于QUARC实时控制软件的实时控制实验平台，可以实现主动悬架控制策略的实验验证，其实时工作原理如图3.4所示。



图 3.4 主动悬架硬件在环实验台实时工作原理

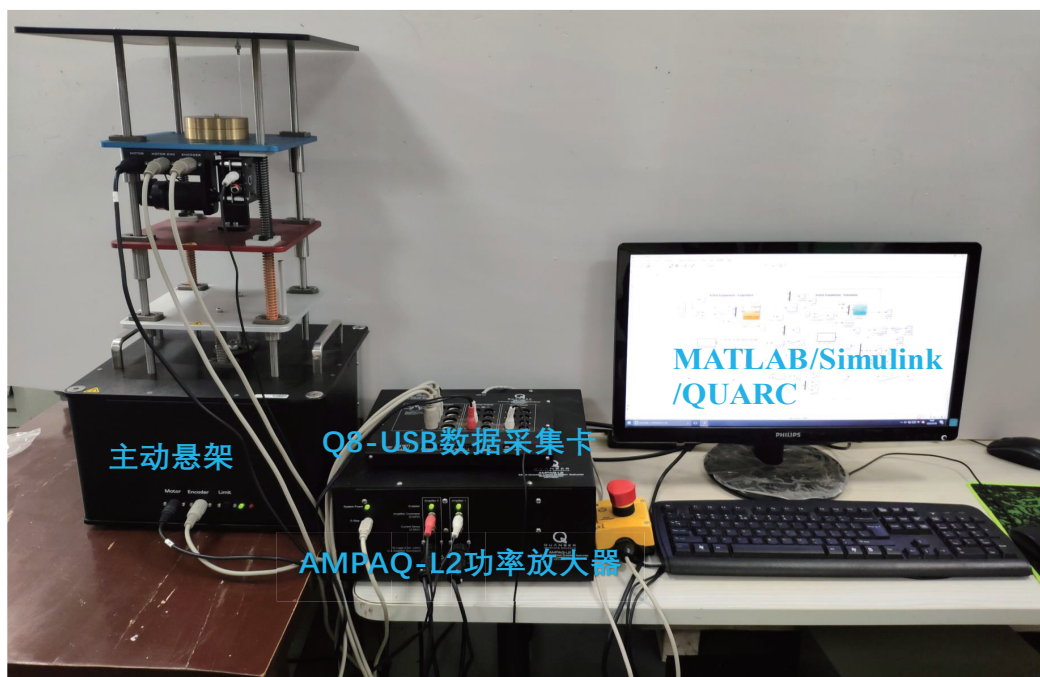


图 3.5 主动悬架硬件在环实验平台

从图3.4可以看出控制器是在MATLAB/Simulink中完成设计，计算机将路面位移信息和控制器计算出的控制量经过Q8-USB数据采集卡的模拟输出通道送入AMPAQ-L2功率放大器，功率放大器产生满足底板有刷伺服电动机和悬架直流电机要求的驱动电流，驱动底板有刷伺服电动机带动底板运动产生路面位移并驱动悬架直流电机产生作动力抑制车身振动；位移传感器和加速度计采集的位移和加速度模拟信号经过Q8-USB数据采集卡送入计算机，Simulink根据传感器采集的悬架状态信息经过控制器处理后输出，从而形成完整的闭环控制。主动悬架硬件在环实验台实物图如图3.5所示。

### 3.4 本章小结

本章首先介绍了主动悬架硬件在环实验平台的硬件结构组成，对主动悬架实验台、数据采集卡、传感器和功率放大器进行了详细的介绍和说明。基于Matlab/Simulink和QUARC实时控制软件，搭建了实时控制实验平台，并详细介绍了实时控制系统的工作原理。



## 第4章 离线优化的滚动时域 $H_\infty$ /广义 $H_2$ 控制主动悬架

### 动悬架

第二章指出,汽车主动悬架的控制问题可归结为一个具有时域约束条件的最优问题,一方面要求提高乘坐舒适性,即从路面扰动到车身垂直加速度的响应越小越好,同时还要求满足悬架动行程、轮胎接地性和执行机构饱和等硬约束条件,是一个典型的多目标控制问题。

本章首先介绍线性矩阵不等式(LMI)的理论基础及系统性能的LMI分析,接着基于LMI理论进行主动悬架多目标控制策略设计。本章采用 $H_\infty$ 范数作为主动悬架系统性能输出的优化指标,同时利用广义 $H_2$ 范数描述主动悬架系统的时域约束,对系统约束输出的峰值限幅。在此基础上,为了同时兼顾提高系统控制性能和满足时域约束,本章结合预测控制的滚动优化思想设计滚动时域 $H_\infty$ /广义 $H_2$ 主动悬架控制方法,该方法基于连续模型和闭环预测,在每个采样时刻求解LMI优化问题,通过滚动优化实时调整控制性能和系统约束。

滚动时域 $H_\infty$ /广义 $H_2$ 控制方法在滚动优化的过程中每一步都需要求解一组线性矩阵不等式优化问题,需要较大的在线计算量,同时控制器求解时间长,不利于推广到实际主动悬架控制系统中。为了降低在线计算的负担,缩短主动悬架控制器求解时间,我们提出一种新的在线计算量小的控制方案,即离线构造一组状态反馈矩阵和一组对应的椭圆不变集,在系统运行时根据系统状态所在的位置选择相应的状态反馈矩阵。

#### 4.1 LMI理论基础

线性矩阵不等式(Linear Matrix Inequality, LMI)是解决凸优化问题的有效方法常被用来处理各种控制及系统问题。系统的各种性能指标和控制约束均可利用线性矩阵不等式表示为独立的LMI形式,实现系统的多目标优化。另外,对于 $H_\infty$ 和 $H_2$ 优化控制,线性矩阵不等式方法采用基于分析的设计思路,克服了Riccati设计方法中存在的缺陷。

### 4.1.1 线性矩阵不等式

线性矩阵不等式一般具有如下形式：

$$F(x) := F_0 + \sum_1^m x_i F_i < 0 \quad (4.1.1)$$

其中 $x_1, \dots, x_m$ 是未知的实数变量（决策变量）， $x = (x_1, \dots, x_m)^T \in \mathfrak{R}^m$ 是由决策变量组成的决策向量； $F_i = F_i^T \in \mathfrak{R}^{n \times n}, i = 0, \dots, m$ 是给定的一组实对称矩阵，式(4.1.1)中的“ $<0$ ”表明 $F(x)$ 是负定的，即对于任意非零向量 $v \in \mathfrak{R}^n$ ，都有 $v^T F(x)v < 0$ 。

线性矩阵不等式往往并不总是规范形式(4.1.1)，如 $F(x) > 0$ 和 $F(x) < G(x)$ 也是LMI，经过处理可分别写成 $-F(x) < 0$ 和 $F(x) - G(x) < 0$ 的标准形式。

一个线性矩阵不等式系统具有如下多个线性矩阵不等式

$$F_1(x) < 0, \dots, F_k(x) < 0$$

令 $F(x) = \text{diag}\{F_1(x), \dots, F_k(x)\}$ ，这里的 $\text{diag}\{F_1(x), \dots, F_k(x)\}$ 表示块对角矩阵， $F_1(x), \dots, F_k(x)$ 是矩阵对角线上的元素。 $F_1(x) < 0, \dots, F_k(x) < 0$ 成立当且仅当

$$F(x) < 0$$

成立。因此，一个具有多LMI约束的系统可由一个单独的LMI来表示。

#### 1. LMI的性质

##### (1) 凸性

满足条件的线性矩阵不等式(4.1.1)中的 $x$ 的全体构成了一个凸集：

$$\phi = \{x : F(x) < 0\}$$

即对于任意的 $x_1, x_2 \in \phi$ 和 $\alpha \in (0, 1)$ 有

$$F[\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2] = \alpha F(x_1) + (1 - \alpha)F(x_2) < 0$$

这表明线性矩阵不等式(4.1.1)可描述自变量 $x$ 的各种凸约束，且如果存在解，求这个解 $x$ 就是求解凸优化问题。

##### (2) 矩阵作变量

如下Lyapunov不等式

$$A^T P + P A < 0 \quad (4.1.2)$$

中 $A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ 是已知的， $P = P^T \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ 是未知的矩阵变量，也就是说，该矩阵不等式中的变量是一个矩阵。

设 $n \times n$ 维对称矩阵的一个基底为 $e_1, \dots, e_M$  ( $M = \frac{n(n+1)}{2}$ ), 则存在 $p_1, \dots, p_M$ , 将任意对称矩阵 $P = P^T \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ 写成 $P = \sum_{i=1}^M p_i e_i$ , 因此

$$\begin{aligned} & A^T \left( \sum_{i=1}^M p_i e_i \right) + \left( \sum_{i=1}^M p_i e_i \right) A \\ &= p_1 (A^T e_1 + e_1 A) + \dots + p_M (A^T e_M + e_M A) \\ &< 0 \end{aligned}$$

可以看出, 上式是线性矩阵不等式的一般形式, 这表明(4.1.2)是关于矩阵变量 $P$ 的线性矩阵不等式。

## 2. Schur补公式

Schur补公式可以将非线性的矩阵不等式转换成线性矩阵不等式。

**引理 4.1 (Schur补公式<sup>[57]</sup>)** 给定一个对称矩阵 $S \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ , 并将 $S$ 分块得到:

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \quad (4.1.3)$$

其中 $S_{11} \in \mathfrak{R}^{r \times r}$ , 以下三个条件等价:

- (i)  $S < 0$
- (ii)  $S_{11} < 0, S_{22} - S_{12}^T S_{11}^{-1} S_{12} < 0$
- (iii)  $S_{22} < 0, S_{11} - S_{12} S_{22}^{-1} S_{12}^T < 0$

**证明:** 条件(i)  $\Leftrightarrow$  条件(ii)

由于 $S$ 是对称矩阵, 所以 $S_{11} = S_{11}^T, S_{22} = S_{22}^T, S_{12} = S_{21}^T$ , 对矩阵 $S$ 进行初等运算, 能够得到

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -S_{21} S_{11}^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -S_{21} S_{11}^{-1} & I \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} S_{11} & 0 \\ 0 & S_{22} - S_{21} S_{11}^{-1} S_{12} \end{bmatrix}$$

因此有

$$\begin{aligned} & S < 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{bmatrix} I & 0 \\ -S_{21} S_{11}^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -S_{21} S_{11}^{-1} & I \end{bmatrix}^T < 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{bmatrix} S_{11} & 0 \\ 0 & S_{22} - S_{21} S_{11}^{-1} S_{12} \end{bmatrix} < 0 \\ \Leftrightarrow & S_{11} < 0, S_{22} - S_{12}^T S_{11}^{-1} S_{12} < 0 \end{aligned}$$

如此便证明了(i)和条件(ii)等价。(i)  $\Leftrightarrow$  (iii)的证明与(i)  $\Leftrightarrow$  (ii)的证明类似。

## 4.1.2 系统性能的LMI分析

线性时不变连续时间系统:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bw(t) \\ z(t) = Cx(t) + Dw(t) \end{cases} \quad (4.1.4)$$

其中 $x(t) \in \mathfrak{R}^{n_x}$ 为状态向量,  $w(t) \in \mathfrak{R}^{n_w}$ 为外部输入,  $z \in \mathfrak{R}^{n_z}$ 为系统输出。设 $T_{wz}(s)$ 表示从外部输入 $w$ 到输出 $z$ 的闭环传递函数。

### 1. 二次稳定性

对于系统(4.1.4), 如果存在一个二次Lyapunov函数

$$V(x) = x^T P x, \quad P > 0 \quad (4.1.5)$$

使得

$$A^T P + P A < 0 \quad (4.1.6)$$

成立, 则称系统(4.1.4)是二次稳定的, 式(4.1.6)中的矩阵 $P$ 被称为Lyapunov矩阵。

### 2. $H_\infty$ 性能

定义系统(4.1.4)从输入 $w$ 到系统输出 $z$ 的 $H_\infty$ 范数为:

$$\|T_{wz}\|_\infty := \sup_{w \in L_2} \frac{\|z\|_2}{\|w\|_2} \quad (4.1.7)$$

式中 $w \in L_2$ 表示 $w$ 是能量有界的信号, 即

$$\|w\|_2 := \left( \int_0^\infty \|w(t)\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

其中 $\|w(t)\| = \sqrt{w^T(t)w(t)}$ 是向量的2范数。

$H_\infty$ 范数是系统频率响应的最大奇异值的峰值, 反映了能量有界信号作为系统输入的情况下, 系统输出信号与输入信号的能量之比。 $H_\infty$ 范数的大小体现了系统从输入 $w$ 到输出 $z$ 的抗干扰能力, 以下引理用线性矩阵不等式描述系统的 $H_\infty$ 范数。

**引理 4.2 (有界实引理)** 对线性时不变系统(4.1.4), 给定一个实数 $\gamma > 0$ , 那么下面的条件是等价的 [43, 58]:

(i) 系统渐近稳定, 且从输入 $w$ 到输出 $z$ 的 $H_\infty$ 范数 $\|T_{wz}\|_\infty < \gamma$ ;

(ii) 当且仅当存在一个矩阵 $P = P^T > 0$ , 使得

$$\begin{bmatrix} A^T P + P A & P B & C^T \\ B^T P & -I & D^T \\ C & D & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.1.8)$$

成立。



**证明:** (ii)  $\Rightarrow$  (i)

由矩阵不等式(4.1.8)可推得 $A^T P + PA < 0$ , 由于矩阵 $P > 0$ , 所以系统(4.1.4)是渐近稳定的。

对矩阵不等式(4.1.8)左边的矩阵分别左乘和右乘矩阵 $\text{diag}\{\gamma, \gamma, \gamma^{-1}\}$ , 并记 $P_p = \gamma^2 P$ , 矩阵不等式(4.1.8)可转化为

$$\begin{bmatrix} A^T P_p + P_p A & P_p B & C^T \\ B^T P_p & -\gamma^2 I & D^T \\ C & D & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.1.9)$$

需要说明的是, 矩阵不等式(4.1.9)是矩阵不等式(4.1.8)的等价形式, 而且 $V(x) = x^T P_p x$ 是系统(4.1.4)的一个Lyapunov函数。

由Schur补公式, 线性矩阵不等式(4.1.9)等价于

$$\begin{bmatrix} C^T \\ D^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A^T P_p + P_p A & P_p B \\ B^T P_p & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.1.10)$$

将不等式(4.1.10)左边的矩阵分别左乘 $\begin{bmatrix} x^T(t) & w^T(t) \end{bmatrix}$ 和右乘 $\begin{bmatrix} x^T(t) & w^T(t) \end{bmatrix}^T$ , 得到

$$\begin{aligned} [Cx(t) + Dw(t)]^T [Cx(t) + Dw(t)] + x^T(t) P_p [Ax(t) + Bw(t)] + [Ax(t) + Bw(t)]^T P_p x(t) \\ - \gamma^2 w^T(t) w(t) < 0 \end{aligned} \quad (4.1.11)$$

将系统方程(4.1.4)代入式(4.1.11), 得到

$$z^T(t) z(t) + x^T(t) P_p \dot{x}(t) + \dot{x}^T(t) P_p x(t) - \gamma^2 w^T(t) w(t) < 0 \quad (4.1.12)$$

由 $V(x) = x^T P_p x$ 可得到 $\frac{dV(t)}{dt} = x^T(t) P_p \dot{x}(t) + \dot{x}^T(t) P_p x(t)$ , 并将其代入(4.1.12)得

$$z^T(t) z(t) - \gamma^2 w^T(t) w(t) + \frac{dV(t)}{dt} < 0$$

对上式从0到 $t$ 积分得到

$$\int_0^t \|z(\tau)\|^2 d\tau - \gamma^2 \int_0^t \|w(\tau)\|^2 d\tau + V(x(t)) - V(x(0)) < 0 \quad (4.1.13)$$

由 $w \in L_2[0, \infty]$ , 在不等式(4.1.13)两边令 $t \rightarrow \infty$ , 假设 $x(0) = 0$ , 则 $V(x(0)) = 0$ , 又因为 $V(x(\infty)) \geq 0$ , 因此有

$$\int_0^\infty \|z(\tau)\|^2 d\tau - \gamma^2 \int_0^\infty \|w(\tau)\|^2 d\tau < 0$$

根据 $H_\infty$ 范数的定义式(4.1.7)有 $\|T_{wz}\|_\infty < \gamma$ , 命题得证。

### 3. 广义 $H_2$ 性能

定义系统(4.1.4)从输入 $w$ 到输出 $z$ 的广义 $H_2$ 范数为:

$$\|T_{wz}\|_g := \sup \left\{ \|z(t)\| : x(0) = 0, t \geq 0, \int_0^t \|w(\tau)\|^2 d\tau \leq 1 \right\} \quad (4.1.14)$$

或

$$\|T_{wz}\|_g := \sup_{w \in L_2} \frac{\|z\|_\infty}{\|w\|_2} \quad (4.1.15)$$

式(4.1.14)和(4.1.15)中的 $\|z\|_\infty$ 表示系统输出信号 $z$ 的无穷范数

$$\|z\|_\infty := \max_{i=1,2,\dots,n_z} \sup_{t \geq 0} |z_i|$$

广义 $H_2$ 范数是系统输出信号的无穷范数与输入信号能量的比值，也被称为系统的 $L_2 \rightarrow L_\infty$ 范数，它在时域上描述了 $w$ 为单位能量信号时，系统输出 $z$ 的峰值。因此，当系统输入 $w$ 是能量有界信号时，广义 $H_2$ 性能是规划时域输出硬约束的恰当的指标。以下引理用线性矩阵不等式描述系统的广义 $H_2$ 范数。

**引理 4.3** 对于线性时不变系统(4.1.4)，给定一个实数 $\rho > 0$ ，假定 $D = 0$ ， $x(0) = 0$ ，则下面的两个条件等价<sup>[58, 59]</sup>：

(i) 系统渐近稳定，且从输入 $w$ 到输出 $z$ 的广义 $H_2$ 范数 $\|T_{wz}\|_g < \rho$ ；

(ii) 当且仅当存在一个矩阵 $P = P^T > 0$ ，使得

$$\begin{bmatrix} A^T P + P A & P B \\ B^T P & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.1.16a)$$

$$\begin{bmatrix} P & C^T \\ C & \rho^2 I \end{bmatrix} > 0 \quad (4.1.16b)$$

成立。

**证明：** (ii)  $\Rightarrow$  (i)

记 $V(x) = x^T P x$ ， $P > 0$ ，由线性矩阵不等式(4.1.16a)可推得 $A^T P + P A < 0$ ，由于矩阵 $P > 0$ ，因此系统(4.1.4)是渐近稳定的。

将不等式(4.1.16a)左边的矩阵分别左乘和右乘 $\begin{bmatrix} x^T(t) & w^T(t) \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} x^T(t) & w^T(t) \end{bmatrix}^T$ ，得到

$$x(t)P(Ax(t) + Bw(t)) + (Ax(t) + Bw(t))^T P x(t) - w^T(t)w(t) < 0 \quad (4.1.17)$$

将系统方程(4.1.4)中的 $\dot{x} = Ax(t) + Bw(t)$  带入不等式(4.1.17)，可得

$$x^T(t)P\dot{x}(t) + \dot{x}^T(t)P x(t) - w^T(t)w(t) < 0 \quad (4.1.18)$$

由 $V(x) = x^T P x$ 可推得 $\frac{dV(t)}{dt} = x^T(t)P\dot{x}(t) + \dot{x}^T(t)P x(t)$ ，将其代入不等式(4.1.18)得

$$\frac{dV(t)}{dt} - w^T(t)w(t) < 0$$

对上式进行积分，得到

$$x^T(t)P x(t) < \int_0^t \|w(\tau)\|^2 d\tau + x^T(0)P x(0) \quad (4.1.19)$$

由于 $x(0) = 0$ ，不等式(4.1.19)可写为

$$x^T(t)Px(t) < \int_0^t \|w(\tau)\|^2 d\tau \quad (4.1.20)$$

由Schur补公式，线性矩阵不等式(4.1.16b)等价于

$$C^T C < \rho^2 P \quad (4.1.21)$$

联立系统方程(4.1.4)、不等式(4.1.20)和不等式(4.1.21)，可得

$$\begin{aligned} z^T(t)z(t) &= x^T(t)C^T Cx(t) \\ &< \rho^2 x^T(t)Px(t) \\ &< \rho^2 \int_0^t \|w(\tau)\|^2 d\tau \\ &< \rho^2 \int_0^\infty \|w(\tau)\|^2 d\tau \end{aligned} \quad (4.1.22)$$

式(4.1.22)对 $t \in [0, \infty)$ 均成立。根据广义 $H_2$ 范数的定义(4.1.15)，有 $\|T_{wz}\|_g < \rho$ ，命题得证。

## 4.2 滚动时域 $H_\infty$ /广义 $H_2$ 主动悬架

### 4.2.1 滚动时域 $H_\infty$ /广义 $H_2$ 控制方法

不失一般性，设带有外部干扰的线性时不变约束系统由如下方程描述：

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_1 w(t) + B_2 u(t) \\ z_1(t) = C_1 x(t) + D_{11} w(t) + D_{12} u(t) \\ z_2(t) = C_2 x(t) + D_{21} w(t) + D_{22} u(t) \end{cases} \quad (4.2.1)$$

系统的时域约束条件为

$$|z_{2i}(t)| \leq z_{2i,\max}, i = 1, 2, \dots, n_{z_2}, t \geq 0 \quad (4.2.2)$$

其中 $x \in \mathfrak{R}^{n_x}$ 为状态变量， $w \in \mathfrak{R}^{n_w}$ 为外部扰动输入， $u \in \mathfrak{R}^{n_u}$ 为控制输入， $z_1 \in \mathfrak{R}^{n_{z_1}}$ 为性能输出， $z_2 \in \mathfrak{R}^{n_{z_2}}$ 为约束输出， $z_2$ 包含控制约束。另外，假设 $D_{21} = 0$ ，表明外部输入 $w$ 不直接影响系统的约束输出 $z_2$ 。

系统(4.2.1)的控制目标为：闭环系统内部稳定，在干扰 $w(t)$ 的作用下性能输出 $z_1(t)$ 一直保持“小”数值，且满足约束(4.2.2)。

本章考虑状态反馈控制 $u(t) = Kx(t)$ ， $K$ 为状态反馈增益，则闭环系统可描述为

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_{cl}x(t) + B_1 w(t) \\ z_1(t) = C_{1,cl}x(t) + D_{11} w(t) \\ z_2(t) = C_{2,cl}x(t) + D_{21} w(t) \end{cases} \quad (4.2.3)$$

其中  $A_{cl} = A + B_2K$ ,  $C_{1,cl} = C_1 + D_{12}K$ ,  $C_{2,cl} = C_2 + D_{22}K$ 。

基于状态反馈控制的闭环系统(4.2.3), 控制目标可等价地描述为:

**命题 4.1** 设计控制器使闭环系统(4.2.3)内部稳定, 从干扰  $w(t)$  到性能输出  $z_1(t)$  的  $H_\infty$  范数最小, 从干扰  $w(t)$  到约束输出  $z_2(t)$  的广义  $H_2$  范数小于正数  $\rho$ 。

令  $T_{wz_1}(s)$  表示从干扰  $w(t)$  到性能输出  $z_1(t)$  的闭环传递函数,  $T_{wz_2}(s)$  表示从干扰  $w(t)$  到约束输出  $z_2(t)$  的闭环传递函数, 则命题4.1可等价于:

$$\text{minimize } \|T_{wz_1}\|_\infty, \quad \text{满足 } \|T_{wz_2}\|_g < \rho, \quad \rho > 0$$

首先给出  $H_\infty$ /广义  $H_2$  控制方法。

**定理 4.1** 假设系统的初值  $x(0) = 0$ , 给定正数  $\rho > 0$ ,  $\gamma > 0$ , 如果存在合适维度的矩阵  $Y$  和正定对称矩阵  $Q$ , 使得以下LMI优化问题

$$\text{minimize } \gamma^2 \quad \text{subject to} \quad (4.2.4)$$

$$\begin{bmatrix} AQ + QA^T + B_2Y + (B_2Y)^T & B_1 & (C_1Q + D_{12}Y)^T \\ B_1^T & -I & D_{11}^T \\ C_1Q + D_{12}Y & D_{11} & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.2.4a)$$

$$\begin{bmatrix} Q & (C_2Q + D_{22}Y)^T \\ C_2Q + D_{22}Y & \rho^2 I \end{bmatrix} > 0 \quad (4.2.4b)$$

存在最优解  $(\gamma^*, Q^*, Y^*)$ , 则状态反馈矩阵可由  $K^* = Y^*(Q^*)^{-1}$  计算得到, 而且闭环系统(4.2.3)

- 1) 内部渐近稳定;
- 2) 从外部干扰  $w(t)$  到性能输出  $z_1(t)$  的  $H_\infty$  性能小于  $\gamma^*$ ;
- 3) 外部扰动的能量如果不大于1, 则满足时域约束(4.2.2);

**证明:**

由引理4.2可知,  $A_{cl}$  是稳定的且从干扰输入  $w(t)$  到性能输出  $z_1(t)$  的  $H_\infty$  性能小于已知的正数  $\gamma$ , 这等价于当且仅当存在一个对称矩阵  $P_1 > 0$  使得以下线性矩阵不等式成立

$$\begin{bmatrix} A_{cl}^T P_1 + P_1 A_{cl} & P_1 B_1 & C_{1,cl}^T \\ B_1^T P_1 & -I & D_{11}^T \\ C_{1,cl} & D_{11} & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.2.5)$$

将  $A_{cl} = A + B_2K$ ,  $C_{1,cl} = C_1 + D_{12}K$  带入(4.2.5), 整理得

$$\begin{bmatrix} A^T P_1 + P_1 A + P_1 B_2 K + (P_1 B_2 K)^T & P_1 B_1 & (C_1 + D_{12}K)^T \\ B_1^T P_1 & -I & D_{11}^T \\ C_1 + D_{12}K & D_{11} & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.2.6)$$

令 $Q = P_1^{-1}$ ，并且使用 $\text{diag}\{Q, I, I\}$ 分别左乘和右乘线性矩阵不等式(4.2.6)，可得

$$\begin{bmatrix} AQ + QA^T + B_2KQ + (B_2KQ)^T & B_1 & (C_1Q + D_{12}KQ)^T \\ B_1^T & -I & D_{11}^T \\ C_1Q + D_{12}KQ & D_{11} & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.2.7)$$

再令 $Y = KQ$ 并代入不等式(4.2.7)，得到关于 $\gamma$ 、 $Q$ 、 $Y$ 的线性矩阵不等式(4.2.4a)。

由引理4.3可知， $\|T_2\|_g \leq \rho$ ， $\rho > 0$ 等价于当且仅当存在一个对称矩阵 $P_2 > 0$ 使以下不等式成立

$$\begin{bmatrix} A_{cl}^T P_2 + P_2 A_{cl} & P_2 B_1 \\ B_1^T P_2 & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.2.8a)$$

$$\begin{bmatrix} P_2 & C_{2,cl}^T \\ C_{2,cl} & \rho^2 I \end{bmatrix} > 0 \quad (4.2.8b)$$

在多目标控制框架下<sup>[57, 60, 61]</sup>，令 $P_2 = P_1 = P$ （ $P_1$ 是 $H_\infty$ 性能对应的Lyapunov矩阵）且 $Q = P_2^{-1}$ ，将 $A_{cl} = A + B_2K$ 和 $C_{2,cl} = C_2 + D_{22}K$ 分别代入(4.2.8a)和(4.2.8b)，并用 $\text{diag}\{Q, I\}$ 分别左乘和右乘不等式(4.2.8a)和(4.2.8b)，得到

$$\begin{bmatrix} AQ + QA^T + B_2KQ + (B_2KQ)^T & B_1 \\ B_1^T & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.2.9a)$$

$$\begin{bmatrix} Q & (C_2Q + D_{22}KQ)^T \\ C_2Q + D_{22}KQ & \rho^2 I \end{bmatrix} > 0 \quad (4.2.9b)$$

将 $Y = KQ$ 代入不等式(4.2.9b)，得到线性矩阵不等式(4.2.4b)，再将 $Y = KQ$ 代入不等式(4.2.9a)，得到

$$\begin{bmatrix} AQ + QA^T + B_2Y + (B_2Y)^T & B_1 \\ B_1^T & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.2.10)$$

可以看到，不等式(4.2.10)内蕴于不等式(4.2.4a)。因此，如果LMI优化问题(4.2.4)有解 $(\gamma^*, Q^*, Y^*)$ ，则闭环系统(4.2.3)满足定理4.1中的三条结论。

定理得证。

前述 $H_\infty$ /广义 $H_2$ 控制方法是一次性设计的方法，无法同时兼顾系统约束与控制性能。如果外部干扰的能量小于单位能量，系统能很好地满足约束，但当遇到大干扰作用时，系统往往超出约束，甚至损坏设备。为了解决这个问题，设计滚动时域 $H_\infty$ /广义 $H_2$ 控制方法，在每个采样时刻在线求解LMI优化问题，充分地利用实时状态包含的信息，使闭环系统实时协调控制性能和系统约束的矛盾，在保证约束满足的前提下获得尽可能好的控制性能。

根据上一节对引理4.3的讨论，矩阵不等式(4.2.8a)等价于

$$x^T(t)Px(t) < \int_0^t \|w(\tau)\|^2 d\tau + x^T(0)Px(0)$$

矩阵不等式(4.2.8b)等价于

$$z_2^T(t)z_2(t) < \rho^2 x^T(t)Px(t)$$

因此

$$z_2^T(t)z_2(t) < \rho^2 \left[ \int_0^\infty \|w(\tau)\|^2 d\tau + x^T(0)Px(0) \right] \quad (4.2.11)$$

假设外部扰动的能量  $\int_0^\infty \|w(\tau)\|^2 d\tau \leq w_{\max}$ , 则有

$$\|z_2(t)\|^2 < \rho^2 [w_{\max} + x^T(0)Px(0)] \quad (4.2.12)$$

其中  $w_{\max}$  是外部扰动的最大能量。

不等式(4.2.12)表明, 在非零初始条件( $x(0) \neq 0$ )下, 得不到  $\|z_2(t)\| < \rho$ , 但是如果  $t_k$  时刻的状态  $x(t_k)$  保持在一个由  $P$  和  $w_{\max}$  定义的椭圆内

$$\Omega(P, w_{\max}) := \{x \in \mathbb{R}^{n_x} | w_{\max} + x^T(t)Px(t) \leq 1\} \quad (4.2.13)$$

则下一采样时刻  $t_{k+1}$  就能够得到  $\|z_2(t)\| < \rho$ 。

由于  $Q = P^{-1}$ , 则由引理4.1(Schur补公式)知,  $x(t_k) \in \Omega(P, w_{\max})$  等价于

$$\begin{bmatrix} 1 - w_{\max} & x^T(t_k) \\ x(t_k) & Q_{t_k} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (4.2.14)$$

在每个采样时刻, 在线求解优化问题

$$\underset{\gamma, Q, Y}{\text{minimize}} \gamma^2 \quad \text{subject to} \quad \text{LMIs(4.2.4a), (4.2.4b), (4.2.14)} \quad (4.2.15)$$

如果LMI优化问题(4.2.15)有最优解  $(\gamma_{t_k}, Q_{t_k}, Y_{t_k})$ , 则当前时刻  $t_k$  的状态反馈矩阵为  $K_{t_k} = Y_{t_k} Q_{t_k}^{-1}$ , 且当前时刻的控制律

$$u(t) = K_{t_k} x(t), \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}), k \geq 0 \quad (4.2.16)$$

滚动策略(4.2.15)能够在满足系统约束的前提下保证每个时刻的  $H_\infty$  性能(耗散性), 但是不一定能保证闭环系统(4.2.3)在整个时域上的  $H_\infty$  性能。

闭环系统(4.2.3)的Lyapunov函数为  $V(x) = x^T Px$ ,  $P > 0$ , 根据上一节对引理4.2(有界实引理)的讨论, 矩阵不等式(4.2.5)等价于以下积分耗散不等式:

$$\int_0^t \|z(\tau)\|^2 d\tau - \gamma^2 \int_0^t \|w(\tau)\|^2 d\tau \leq V(x(0)) - V(x(t)) \quad (4.2.17)$$

定义  $V(t, x(t)) = x^T(t)P_{t_k}x(t)$ ,  $\forall t \in [t_k, t_{k+1})$ , 则闭环系统(4.2.3)在  $t \in [t_k, t_{k+1})$  上满足以下积分耗散不等式:

$$\int_{t_k}^t \|z_1(\tau)\|^2 d\tau - \gamma_{t_k}^2 \int_{t_k}^t \|w(\tau)\|^2 d\tau \leq V(t_k, x(t_k)) - V(t, x(t)) \quad (4.2.18)$$

即

$$\int_{t_k}^t \|z_1(\tau)\|^2 d\tau - \gamma_{t_k}^2 \int_{t_k}^t \|w(\tau)\|^2 d\tau \leq x^T(t_k)P_{t_k}x(t_k) - x^T(t)P_{t_k}x(t) \quad (4.2.19)$$

可以看到积分耗散不等式(4.2.19)只是在一小段时间  $t \in [t_k, t_{k+1})$  上成立。

根据前面的讨论, 在每个采样时刻都要求解优化问题, 如果优化问题(4.2.15)在每个时刻均有最优解, 则闭环系统(4.2.3)对所有的 $(\gamma_{t_k}, P_{t_k}), k = 0, 1, 2, \dots$ 满足下列不等式:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \|z_1(\tau)\|^2 d\tau - \gamma_{t_0}^2 \int_{t_0}^{t_1} \|w(\tau)\|^2 d\tau &\leq x^T(t_0)P_{t_0}x(t_0) - x^T(t_1)P_{t_0}x(t_1) \\ \int_{t_1}^{t_2} \|z_1(\tau)\|^2 d\tau - \gamma_{t_1}^2 \int_{t_1}^{t_2} \|w(\tau)\|^2 d\tau &\leq x^T(t_1)P_{t_1}x(t_1) - x^T(t_2)P_{t_1}x(t_2) \\ &\vdots \end{aligned} \quad (4.2.20)$$

其中 $t \in [t_k, t_{k+1}), k \geq 0$ , 将(4.2.20)中各不等式的左右两边分别相加, 可得

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t [\|z_1(\tau)\|^2 - \max\{\gamma_{t_0}, \gamma_{t_1}, \dots, \gamma_{t_k}\}^2 \|w(\tau)\|^2] d\tau &\leq x^T(t_0)P_{t_0}x(t_0) \\ -x^T(t)P_{t_k}x(t) - \sum_{i=1}^k [x^T(t_i)P_{t_{i-1}}x(t_i) - x^T(t_i)P_{t_i}x(t_i)] \end{aligned} \quad (4.2.21)$$

不等式(4.2.21)可以写为

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t [\|z_1(\tau)\|^2 - \gamma_{\max}^2 \|w(\tau)\|^2] d\tau &\leq V(t_0, x(t_0)) - V(t, x(t)) \\ - \sum_{i=1}^k [x^T(t_i)P_{t_{i-1}}x(t_i) - x^T(t_i)P_{t_i}x(t_i)] \end{aligned} \quad (4.2.22)$$

其中 $\gamma_{\max} = \max\{\gamma_{t_0}, \gamma_{t_1}, \dots, \gamma_{t_k}\}$ 。

定义 $p_{t_0} = 0$ 和

$$p_{t_k} = \sum_{i=1}^k [x^T(t_i)P_{t_{i-1}}x(t_i) - x^T(t_i)P_{t_i}x(t_i)] \quad (4.2.23)$$

可以看出, 对于不等式(4.2.22), 如果 $p_{t_k} \geq 0$ , 则闭环系统(4.2.3)在整个时域上满足耗散不等式

$$\int_{t_0}^t (\|z(\tau)\|^2 - \gamma_{\max}^2 \|w(\tau)\|^2) d\tau \leq V(t_0, x(t_0)) - V(t, x(t)) \quad (4.2.24)$$

即闭环系统(4.2.3)在整个时域上的 $H_\infty$ 性能得到了保证。

式(4.2.23)可化为如下形式的迭代式

$$p_{t_k} := p_{t_{k-1}} + [x^T(t_k)P_{t_{k-1}}x(t_k) - x^T(t_k)P_{t_k}x(t_k)] \quad (4.2.25)$$

$p_{t_k}$ 在每个时刻由迭代式更新计算。

因此 $p_{t_k} \geq 0$ 可由下面的耗散不等式约束来保证<sup>[47]</sup>:

$$p_{t_{k-1}} + [x^T(t_k)P_{t_{k-1}}x(t_k) - x^T(t_k)P_{t_k}x(t_k)] \geq 0 \quad (4.2.26)$$

又 $Q_{t_{k-1}} = P_{t_{k-1}}^{-1}$ , 由引理4.1(Schur公式)得, 不等式(4.2.26)等价于:

$$\begin{bmatrix} p_{t_{k-1}} + x^T(t_k)Q_{t_{k-1}}^{-1}x(t_k) & x^T(t_k) \\ x(t_k) & Q_{t_{k-1}} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (4.2.27)$$

由此便得到了保证闭环系统(4.2.3)在整个时域上的 $H_\infty$ 性能的线性矩阵不等式条件。

在每个采样时刻 $t_k$ 求解以下LMI优化问题

$$\underset{\gamma, Q, Y}{\text{minimize}} \gamma^2 \quad \text{subject to} \quad \text{LMIs(4.2.4a), (4.2.4b), (4.2.14), (4.2.27)} \quad (4.2.28)$$

如果优化问题(4.2.28)有解 $(\gamma_{t_k}^*, Q_{t_k}^*, Y_{t_k}^*)$ , 则 $t_k$ 时刻的状态反馈控制律:

$$u(t) = K_{t_k}^* x(t) = Y_{t_k}^* (Q_{t_k}^*)^{-1} x(t), \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}), k \geq 0 \quad (4.2.29)$$

在下一时刻 $t_{k+1}$ 到来之前,  $u(t)$ 将一直作用于系统。

滚动时域 $H_\infty$ /广义 $H_2$ 控制策略(4.2.28)在满足系统约束的前提下不仅能够保证每个时刻系统的耗散性能, 而且在整个时域上也能够保证闭环系统的耗散性。

基于闭环系统(4.2.3), 给出以下结论:

**定理 4.2** 假设 $(A, B_2)$ 可稳, 如果滚动时域 $H_\infty$ /广义 $H_2$ 控制策略(4.2.28)在每个采样时刻均有最优解 $(\gamma_{t_k}^*, Q_{t_k}^*, Y_{t_k}^*)$ , 则由状态反馈控制律(4.2.29)构成的闭环系统:

- 1) 内部二次稳定;
- 2) 满足系统约束(4.2.2);
- 3) 从干扰输入 $w(t)$ 到性能输出 $z_1(t)$ 的 $H_\infty$ 范数小于正数 $\gamma_{\max}$ ;

## 4.2.2 滚动时域 $H_\infty$ /广义 $H_2$ 悬架控制器设计

本小节基于滚动时域 $H_\infty$ /广义 $H_2$ 方法进行主动悬架控制器设计, 采用的是如第二章建立的1/4车主动悬架系统模型。根据第二章的讨论, 取优化输出和约束输出分别为 $z_1$  (车身垂直加速度) 和 $z_2$  (悬架动行程、轮胎接地性和作动器输出饱和等约束):

$$z_1 = \ddot{x}_s, \quad z_2 = \begin{bmatrix} \frac{x_s - x_u}{S_{\max}} \\ \frac{k_u(x_u - x_r)}{(m_s + m_u)g} \\ \frac{u}{u_{\max}} \end{bmatrix} \quad (4.2.30)$$

式(4.2.30)中的输出约束 $z_2$ 已归一化处理, 因而只需要求 $\|z_2\| \leq 1$ , 即 $\rho=1$ 。

主动悬架系统方程

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_1w(t) + B_2u(t) \\ z_1(t) = C_1x(t) + D_{11}w(t) + D_{12}u(t) \\ z_2(t) = C_2x(t) + D_{21}w(t) + D_{22}u(t) \end{cases} \quad (4.2.31)$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -\frac{k_s}{m_s} & -\frac{c_s}{m_s} & 0 & \frac{c_s}{m_s} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_s}{m_u} & \frac{c_s}{m_u} & -\frac{k_u}{m_u} & -\frac{c_s}{m_u} \end{bmatrix}, \quad B_1 = [0 \ 0 \ -1 \ 0]^T, \quad B_2 = \left[ 0 \ \frac{1}{m_s} \ 0 \ -\frac{1}{m_u} \right]^T$$



$$C_1 = \begin{bmatrix} -\frac{k_s}{m_s} & -\frac{c_s}{m_s} & 0 & \frac{c_s}{m_s} \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{S_{\max}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{k_u}{(m_s+m_u)g} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D_{11} = 0, \quad D_{12} = \frac{1}{m_s}, \quad D_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad D_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{u_{\max}} \end{bmatrix}^T$$

表 4.1 悬架模型参数

参数	符号	数值
簧载质量	$m_s$	320 kg
非簧载质量	$m_u$	40 kg
悬架阻尼	$c_s$	1000 N.s/m
悬架刚度	$k_s$	18000 N/m
轮胎刚度	$k_u$	200000 N/m
最大作动力	$u_{\max}$	1000 N
最大动行程	$S_{\max}$	0.08 m

主动悬架滚动时域 $H_\infty$ /广义 $H_2$ 控制方法能够实时调整主动悬架的约束和性能，使主动悬架闭环系统内部稳定，即使在非常恶劣的路况上行驶，依然能够保证悬架动行程、轮胎接地性和作动力不超出约束，同时尽可能降低从路面干扰到车身垂直加速度的响应。本章同时设计 $H_\infty$ /广义 $H_2$ 固定状态反馈控制器作为对比，求解优化问题(4.2.4)即可求得 $H_\infty$ /广义 $H_2$ 控制的状态反馈矩阵。

### 4.2.3 仿真分析

车辆在路面行驶过程中，确定性路面干扰输入往往导致悬架违背动行程和接地性要求。为了能够充分体现本章所设计的控制方法对约束满足和控制性能提高的协调能力，本章主动悬架系统的路面干扰输入选择如式(2.1.3)描述的长坡形凸块路面。仿真使用的主动悬架各参数见表4.1，其中悬架动行程和作动器输出最大值分别为 $S_{\max} = 0.08m$ 和 $u_{\max} = 1000N$ 。

取采样时间为0.02s，仿真时长2s，图4.1、4.2、和4.3分别给出了汽车以低速20km/h、中速40km/h和高速65km/h驶过高 $A_m = 0.1m$ ，宽 $L = 5m$ 凸块（低速、中速和高速针对的是所采用的凸块的大小规格来说的）的滚动时域 $H_\infty$ /广义 $H_2$ 主动悬架（实线）、 $H_\infty$ /广义 $H_2$ 主动悬架（虚线）和被动悬架（点划线）响应曲线。

可以看到，在任何行车速度下被动悬架的车身垂直加速度峰值均最高，乘坐舒适性最差。另一方面，被动悬架的响应在扰动消失很长时间后仍然有明显的震荡，相比之下主动悬架能够很快地进入稳态。

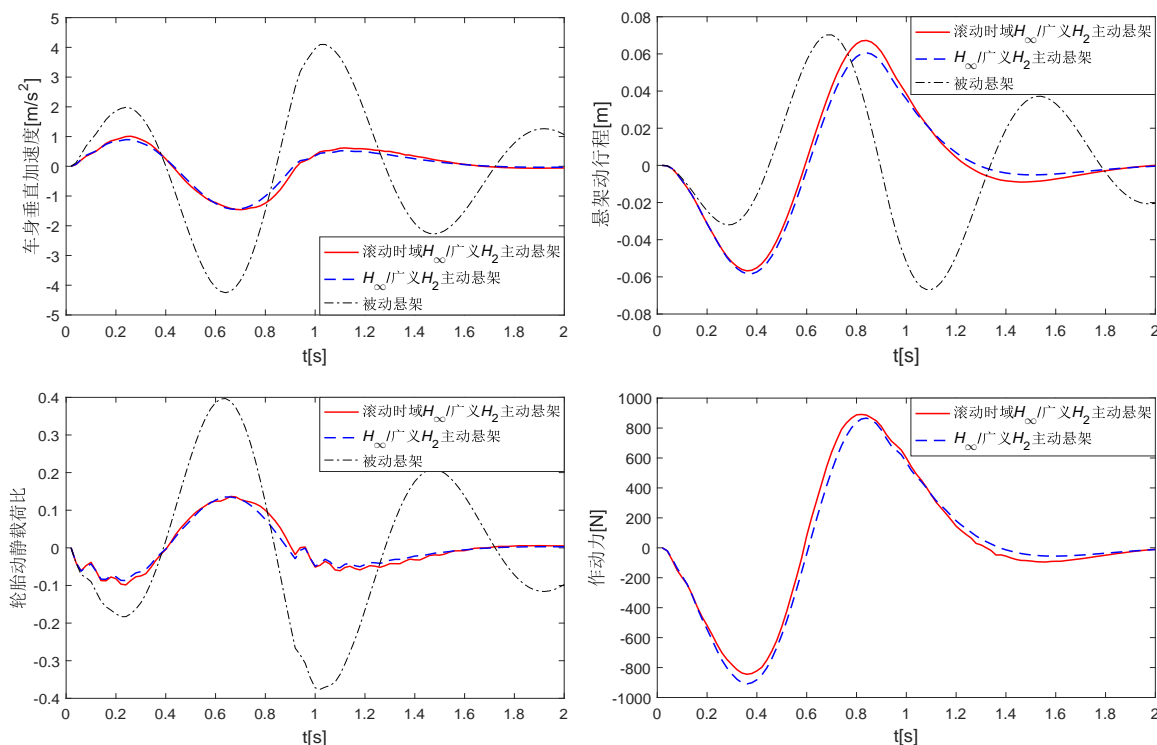


图 4.1 悬架凸块响应(仿真  $v = 20km/h$ )

由图4.1可知，低速( $20km/h$ )时， $H_\infty/H_2$ 主动悬架和滚动时域 $H_\infty/H_2$ 主动悬架的响应均满足约束要求，而且能够很好地改善乘坐舒适性，两者的性能输出（车身垂向加速度）大体相同，这一点从表4.2中也能看出。

从图4.2可以看出，中速( $40km/h$ )时，被动悬架的悬架动行程违背了约束； $H_\infty/H_2$ 主动悬架和滚动时域 $H_\infty/H_2$ 主动悬架都能够很好地改善乘坐舒适性，但 $H_\infty/H_2$ 主动悬架的作动力超出了饱和限制，而滚动时域 $H_\infty/H_2$ 主动悬架的各约束条件均能满足要求，而且在作动力即将超出限制时能够主动调节以避免超出最大作动力限制。

由图4.3可以看到，高速( $65km/h$ )时， $H_\infty/H_2$ 主动悬架的悬架动行程和作动力均违背了约束（牺牲了悬架动行程来优化乘坐舒适性），而滚动时域 $H_\infty/H_2$ 主动悬架响应均在约束范围内。滚动时域 $H_\infty/H_2$ 主动悬架的车身垂直加速度响应变差，几乎和被动悬架相近，由此可见高速大扰动下，滚动时域 $H_\infty/H_2$ 主动悬架系

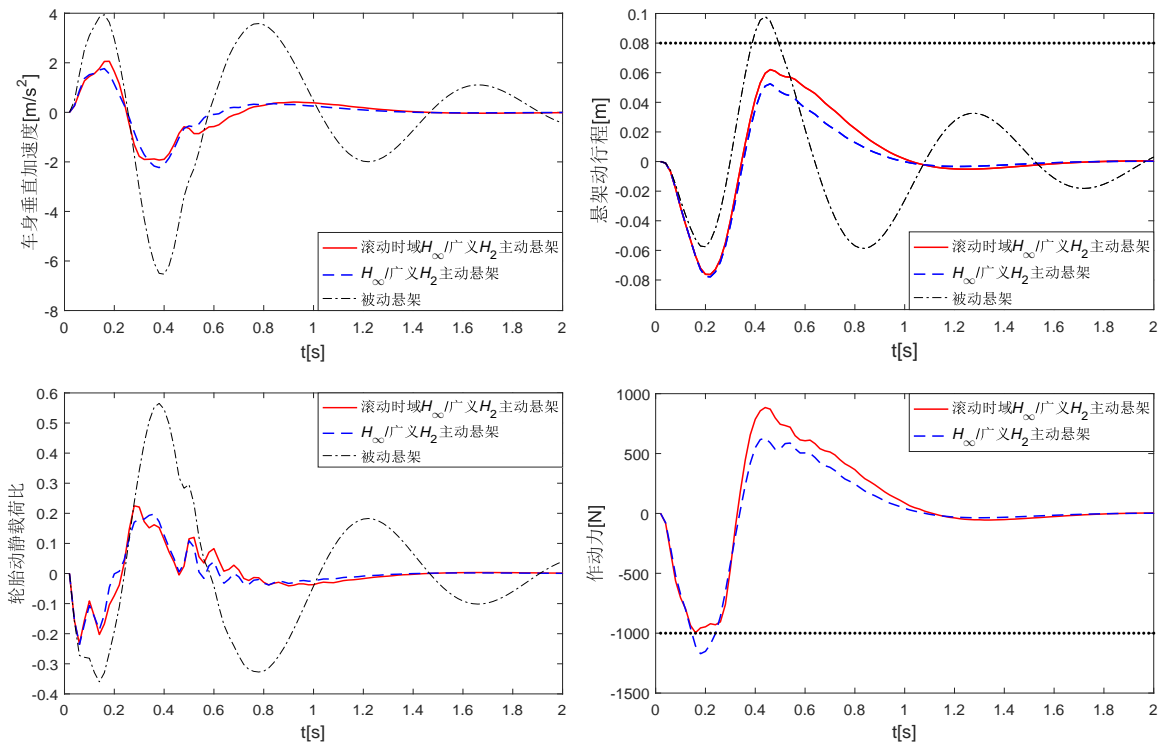


图 4.2 悬架凸块响应(仿真 $v = 40km/h$ )

统约束的满足是以降低乘坐舒适性为代价。

表 4.2 车身垂直加速度RMS值

	20km/h	40km/h	65km/h
被动悬架	2.2030	2.4126	2.0804
$H_\infty$ /广义 $H_2$ 主动悬架	0.6102	0.7141	0.7735
滚动时域 $H_\infty$ /广义 $H_2$ 主动悬架	0.6663	0.7580	1.5736

通过对表4.2中车身垂直加速度均方根值的分析，加上分析对比图4.1、图4.2和图4.3中车身垂直加速度和约束输出响应，能够看出滚动时域 $H_\infty$ /广义 $H_2$ 控制方法是按以下思路调节约束满足和控制性能提高之间的矛盾关系的：在系统遇到大扰动即将超出约束限制（接近约束边界）时，降低控制性能以避免违背约束；当系统遇到的扰动不足以导致超出约束（远离约束边界）时，提高系统的性能。

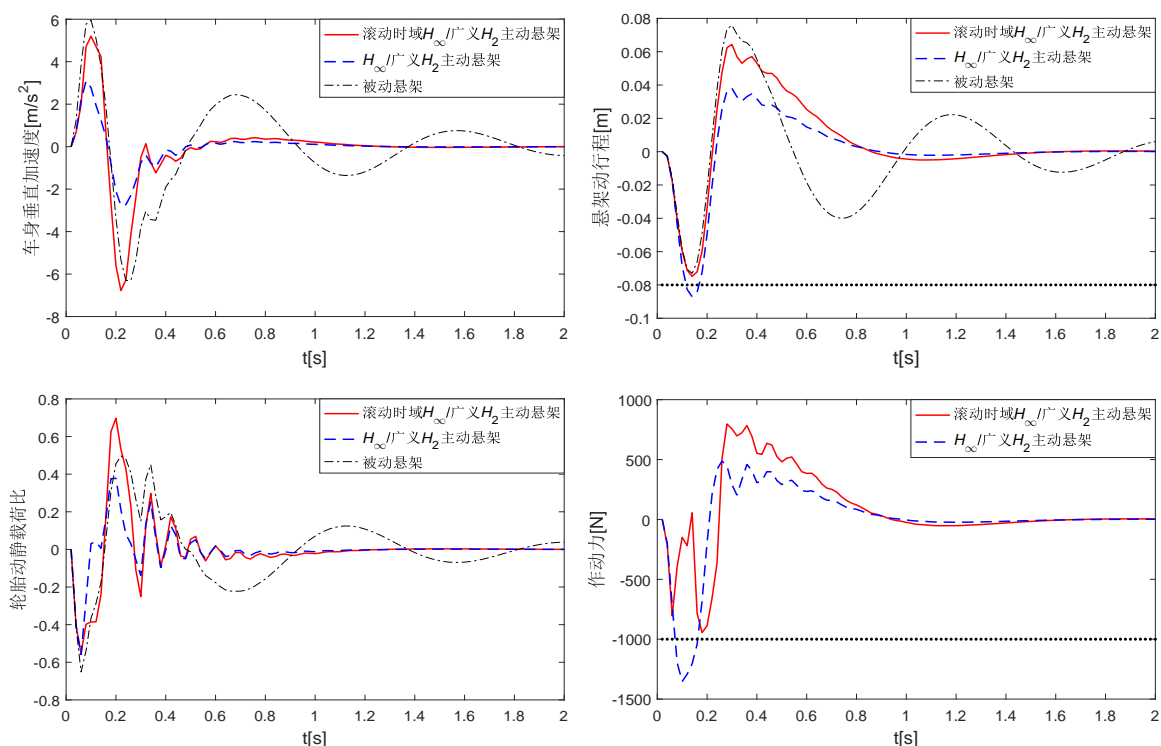


图 4.3 悬架凸块响应(仿真  $v = 65km/h$ )

### 4.3 离线优化的滚动时域 $H_\infty/H_2$ 主动悬架

前一小节设计的滚动时域  $H_\infty/H_2$  控制方法能够兼顾系统的约束和性能，但由于在系统运行的每个时刻都需要求解一组线性矩阵不等式，控制器解算耗时长、在线计算量大，因此该控制方法不利于主动悬架系统的实时主动控制。针对主动悬架控制系统，在上一小节滚动时域  $H_\infty/H_2$  控制方法的基础上，本小节基于渐近稳定的椭圆不变集的概念，设计一种滚动时域  $H_\infty/H_2$  控制的离线实现算法，该算法不仅可以兼顾系统约束和性能提高，而且能够大大降低控制器求解时间，因此该算法能够应用于实际悬架系统中。

离线优化的滚动时域  $H_\infty/H_2$  控制方法分为“离线设计”和“在线综合”，通过离线求解LMI优化问题，确定一系列嵌套的渐近稳定椭圆不变集和对应的状态反馈矩阵并将其存储起来<sup>[62-66]</sup>；在线时，搜索包含当前系统状态的最小的渐近稳定椭圆不变集，实际状态反馈矩阵采用该渐近稳定椭圆不变集对应的状态反馈矩阵。

### 4.3.1 离线优化的滚动时域 $H_\infty$ /广义 $H_2$ 控制方法

考虑由方程(4.2.1)描述的线性时不变约束系统, 时域约束条件由(4.2.2)给出,  $z_1$ 为控制输出,  $z_2$ 为约束输出, 假设外部干扰满足 $\int_0^\infty \|w(\tau)\|^2 d\tau \leq w_{\max}$ , 其中 $w_{\max}$ 是外部干扰的最大能量。

考虑状态反馈控制 $u(t) = Kx(t)$ , 闭环系统可由(4.2.3)描述。

#### 1. 渐近稳定的椭圆不变集

定义系统(4.2.1)的状态空间 $\mathfrak{R}^{n_x}$ 的一个子集为

$$\xi = \{x \in \mathfrak{R}^{n_x} \mid \|x\|_{Q^{-1}}^2 \leq 1 - w_{\max}\} \quad (4.3.1)$$

其中 $\|x\|_{Q^{-1}}^2 = x^T Q^{-1} x$ , 集合 $\xi$ 是系统(4.2.1)的渐近稳定椭圆不变集。

#### 2. 离线设计

“离线设计”能够得到 $N$ 个互相嵌套的渐近稳定椭圆不变集 $\xi_i = \{x \in \mathfrak{R}^{n_x} \mid \|x\|_{Q_i^{-1}}^2 \leq 1 - w_{\max}\}$ 和对应的状态反馈增益矩阵 $K_i = Y_i Q_i^{-1}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ 。

“离线设计”具体过程分为以下两个步骤进行:

**步骤1:** 基于含有约束(4.2.2)的系统(4.2.1), 给定一个距原点充分远的可行状态 $x_1$ , 将不等式(4.2.14)中的 $x(t_k)$ 用 $x_1$ 替换,  $Q_{t_k}$ 用 $Q_1$ 替换, 然后求解优化问题(4.2.15)得到优化解 $\gamma_1, Y_1, Q_1$ 和椭圆不变集 $\xi_1 = \{x \in \mathfrak{R}^{n_x} \mid \|x\|_{Q_1^{-1}}^2 \leq 1 - w_{\max}\}$ , 将 $\gamma_1, Y_1, Q_1, K_1 (= Y_1 Q_1^{-1})$ 存储至表中。

**步骤2:** 从 $i = 2$ 到 $i = N$ , 在第 $i - 1$ 个椭圆不变集中选择状态 $x_i$ , 即 $x_i$ 满足 $\|x_i\|_{Q_{i-1}^{-1}}^2 \leq 1 - w_{\max}$ , 将不等式(4.2.14)中的 $x(t_k)$ 替换为 $x_i$ ,  $Q_{t_k}$ 替换为 $Q_i$ , 并增加约束条件

$$Q_i < Q_{i-1} \quad (4.3.2)$$

离线求解以下优化问题

$$\underset{\gamma, Q, Y}{\text{minimize}} \gamma^2 \quad \text{subject to LMI(4.2.4a), (4.2.4b), (4.2.14), (4.3.2)} \quad (4.3.3)$$

得到 $\gamma_i, Y_i, Q_i$ 和对应的椭圆不变集 $\xi_i = \{x \in \mathfrak{R}^{n_x} \mid \|x\|_{Q_i^{-1}}^2 \leq 1 - w_{\max}\}$ , 计算出 $K_i = Y_i Q_i^{-1}$ , 将 $\gamma_i, Y_i, Q_i^{-1}, K_i$ 存储至查找表中。

**注 4.1** 在步骤2中从 $i = 2$ 到 $i = N$ , 我们增加了约束条件 $Q_i < Q_{i-1}$ , 也即 $Q_{i-1}^{-1} < Q_i^{-1}$ 。对于渐近稳定椭圆不变集 $\xi_{i-1} = \{x \in \mathfrak{R}^{n_x} \mid \|x\|_{Q_{i-1}^{-1}}^2 \leq 1 - w_{\max}\}$ 和 $\xi_i = \{x \in \mathfrak{R}^{n_x} \mid \|x\|_{Q_i^{-1}}^2 \leq 1 - w_{\max}\}$ 来说,  $Q_{i-1}^{-1} < Q_i^{-1}$ 意味着椭圆不变集 $\xi_i$ 在椭圆不变集 $\xi_{i-1}$ 的内部, 即 $\xi_i \subset \xi_{i-1}$ 。因此我们离线得到的渐近稳定椭圆不变集 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_i, \dots, \xi_N$ 是逐个包含嵌套的, 且 $\xi_1$ 最大,  $\xi_N$ 最小。

通过以上“离线设计”的步骤我们得到了包含 $N$ 组数据的查找表，如表4.3所示。

**表 4.3 “离线设计”生成的查找表**

$\gamma_1$	$\gamma_2$	$\cdots$	$\gamma_i$	$\cdots$	$\gamma_N$
$Y_1$	$Y_2$	$\cdots$	$Y_i$	$\cdots$	$Y_N$
$Q_1^{-1}$	$Q_2^{-1}$	$\cdots$	$Q_i^{-1}$	$\cdots$	$Q_N^{-1}$
$K_1$	$K_2$	$\cdots$	$K_i$	$\cdots$	$K_N$

从“离线设计”的过程中能够看出，无论是步骤1中求解的优化问题(4.2.15)还是步骤2中求解的优化问题(4.3.3)中都不包含4.2节中系统耗散性约束(4.2.27)，这是因为我们是离线求解优化问题，无法将系统运行的任何量进行累加。因此，在“离线设计”中无法求解带耗散性约束的优化问题，但这并不代表我们无法保证系统的耗散性，我们将在“在线综合”中将闭环系统的耗散性考虑进来。

## 2. 在线综合

“在线综合”就是在线查表、在线搜索，求解控制器，系统运行的每个采样时刻通过查找“离线设计”得到的表4.3找到并确定系统状态所处的位置，然后选择相应的状态反馈增益矩阵。

设系统(4.2.1)运行的当前时刻为 $t_k$ ，对应的状态为 $x(t_k)$ ，当前时刻的状态反馈矩阵为 $K(t_k)$ 。 $x(t_k)$ 的位置分为三种情况：在最大的椭圆不变集的外面，在两个椭圆不变集之间的环形区域，在最小的椭圆不变集内。根据 $x(t_k)$ 的位置求解状态反馈矩阵的具体步骤如下：

**步骤1：**判断当前时刻的状态 $x(t_k)$ 是否在最大的椭圆不变集 $\xi_1$ 外面的区域，若在，即 $x(t_k)$ 满足如下不等式

$$\|x(t_k)\|_{Q_1^{-1}}^2 > 1 - w_{\max} \quad (4.3.4)$$

成立，则当前时刻的状态反馈矩阵选择为最大椭圆不变集对应的状态反馈矩阵，也就是 $K_{t_k} = K_1$ ；若 $x(t_k)$ 不在 $\xi_1$ 外面的区域，即(4.3.4)不成立，则令 $i = 1$ ，进行步骤2，向椭圆不变集区域内搜索。

**步骤2：**判断当前时刻的状态 $x(t_k)$ 在哪两个椭圆不变集之间，则选择这两个椭圆不变集中包围当前状态椭圆不变集对应的状态反馈矩阵：若 $x(t_k)$ 满足条件

$$\|x(t_k)\|_{Q_i^{-1}}^2 \leq 1 - w_{\max} \text{ 且 } \|x(t_k)\|_{Q_{i+1}^{-1}}^2 > 1 - w_{\max} \quad (4.3.5)$$

则 $K_{t_k} = K_i$ ；若不满足，进行步骤3，向更小的椭圆不变集搜索。

**步骤3：**如果 $i < N$ ，令 $i = i + 1$ ，返回步骤2；如果 $i = N$ ，进行步骤4。

**步骤4:** 当前时刻的状态 $x(t_k)$ 在最小的椭圆不变集 $\xi_N$ 区域内, 即 $\|x(t_k)\|_{Q_N^{-1}}^2 \leq 1 - w_{\max}$ , 则当前时刻的状态反馈矩阵选择为 $\xi_N$ 对应的状态反馈矩阵, 即 $K_{t_k} = K_N$ 。

综合以上在线查表过程,  $t_k$ 时刻状态反馈矩阵 $K_{t_k}$ 可由下式给出

$$K_{t_k} = \begin{cases} K_1, & \|x(t_k)\|_{Q_1^{-1}}^2 > 1 - w_{\max} \\ K_i, & \|x(t_k)\|_{Q_i^{-1}}^2 \leq 1 - w_{\max} \text{ 且 } \|x(k)\|_{Q_{i+1}^{-1}}^2 > 1 - w_{\max}, i \neq N \\ K_N, & \|x(t_k)\|_{Q_N^{-1}}^2 \leq 1 - w_{\max} \end{cases} \quad (4.3.6)$$

通过以上“在线综合”过程得到当前 $t_k$ 时刻的控制律为

$$u(t_k) = K_{t_k}x(t_k) \quad (4.3.7)$$

在每个时刻运用控制律(4.3.7)能满足系统的约束条件且能够保证每个时刻的 $H_\infty$ 性能, 但是不能保证闭环系统在整个时域上的耗散性( $H_\infty$ 性能)。结合4.2节关于耗散性的讨论, 下面我们给出保证闭环系统在整个时域上的耗散性的“在线综合”过程。

设系统运行时的前一时刻为 $t_{k-1}$ , 对应的状态反馈矩阵为 $K_{t_{k-1}}$ , 结合4.2节, 设

$$p_{t_0} = 0, \quad p_{t_k} := p_{t_{k-1}} + [x^T(t_k) (P_{t_{k-1}} - P_{t_k}) x(t_k)]$$

其中 $P_{t_{k-1}}$ 为前一时刻系统的Lyapunov矩阵,  $P_{t_k}$ 为当前时刻系统的Lyapunov矩阵, 又因为 $Q_{t_{k-1}}^{-1} = P_{t_{k-1}}$ ,  $Q_{t_k}^{-1} = P_{t_k}$ , 所以 $p_{t_k}$ 又可以写为:

$$p_{t_k} = p_{t_{k-1}} + \left[ x^T(t_k) \left( Q_{t_{k-1}}^{-1} - Q_{t_k}^{-1} \right) x(t_k) \right] \quad (4.3.8)$$

只有在系统运行的每个采样时刻均满足耗散性条件 $p_{t_k} \geq 0$ , 才能保证闭环系统在整个时域上的耗散性。

**步骤1:** 判断当前时刻的状态 $x(t_k)$ 是否在最大的椭圆不变集 $\xi_1$ 外面的区域, 若在, 也即不等式(4.3.4)成立, 将 $\xi_1$ 对应的 $Q_1^{-1}$ 作为当前时刻Lyapunov矩阵的逆, 即 $Q_{t_k}^{-1} = Q_1^{-1}$ , 并根据式(4.3.8)计算当前时刻的 $p_{t_k}$ , 若 $p_{t_k} \geq 0$  (满足耗散性条件), 则选择最大椭圆不变集 $\xi_1$ 对应的状态反馈矩阵作为当前时刻的状态反馈矩阵, 也就是 $K_{t_k} = K_1$ ; 若 $p_{t_k} < 0$  (不满足耗散性条件), 当前时刻的状态反馈矩阵 $K_{t_k}$ 选择为上一时刻的状态反馈矩阵, 也就是 $K_{t_k} = K_{t_{k-1}}$ , 如此则有 $Q_{t_k}^{-1} = Q_{t_{k-1}}^{-1}$ , 根据式(4.3.8), 有

$$\begin{aligned} p_{t_k} &= p_{t_{k-1}} + \left[ x^T(t_k) \left( Q_{t_{k-1}}^{-1} - Q_{t_{k-1}}^{-1} \right) x(t_k) \right] \\ &= p_{t_{k-1}} \\ &\geq 0 \end{aligned} \quad (4.3.9)$$

如此便满足了耗散性条件。如果 $x(t_k)$ 不在 $\xi_1$ 的外面, 也即不等式(4.3.4)不成立, 则需要向更小的椭圆不变集继续搜索, 令 $i = 1$ , 进行步骤2。

**步骤2:** 判断当前状态 $x(t_k)$ 在哪两个椭圆不变集 $\xi_i$ 和 $\xi_{i+1}$ 之间的环形区域, 也即若 $x(t_k)$ 满足条件(4.3.5), 选择包围状态 $x(t_k)$ 的椭圆不变集 $\xi_i$ 对应的 $Q_i^{-1}$ 作为当前时刻Lyapunov矩阵的逆, 即 $Q_{t_k}^{-1} = Q_i^{-1}$ , 由式(4.3.8)计算 $p_{t_k}$ , 若 $p_{t_k} \geq 0$  (满足耗散性条

件), 则选择这两个椭圆不变集中包围当前状态的椭圆不变集 $\xi_i$ 对应的状态反馈矩阵 $K_i$ 作为当前时刻的状态反馈矩阵 $K(t_k)$ , 也即 $K_{t_k} = K_i$ ; 若 $p_{t_k} < 0$  (不满足耗散性条件), 当前时刻的状态反馈矩阵选择为上一时刻的状态反馈矩阵, 即 $K_{t_k} = K_{t_{k-1}}$ , 如此便有 $Q_{t_k}^{-1} = Q_{t_{k-1}}^{-1}$ , 根据式(4.3.8), 有(4.3.9)成立, 耗散性条件得到满足。如果 $x(t_k)$ 不在椭圆不变集 $\xi_i$ 和 $\xi_{i+1}$ 之间, 则需要向更小的椭圆不变集继续搜索, 进行步骤3。

**步骤3:** 如果 $i < N$ , 令 $i = i + 1$ , 返回步骤2; 如果 $i = N$ , 进行步骤4。

**步骤4:** 当前时刻的状态 $x(t_k)$ 在最小的椭圆不变集 $\xi_N$ 区域内, 即 $\|x(t_k)\|_{Q_N^{-1}}^2 \leq 1 - w_{\max}$ , 令 $Q_{t_k}^{-1} = Q_N^{-1}$ , 由式(4.3.8)计算 $p_{t_k}$ , 若 $p_{t_k} \geq 0$ , 则当前时刻的状态反馈矩阵选择为 $\xi_N$ 对应的状态反馈矩阵, 即 $K_{t_k} = K_N$ ; 若 $p_{t_k} < 0$ , 当前时刻的状态反馈矩阵选择为上一时刻的状态反馈矩阵, 即 $K_{t_k} = K_{t_{k-1}}$ , 则有 $Q_{t_k}^{-1} = Q_{t_{k-1}}^{-1}$ , 根据式(4.3.8), 有(4.3.9)成立, 耗散性条件得到满足。

综合以上在线查表过程,  $t_k$ 时刻状态反馈矩阵 $K_{t_k}$ 可由下式给出

$$K_{t_k} = \begin{cases} K_1, \|x(k)\|_{Q_1^{-1}}^2 > 1 - w_{\max}, p_{t_k} \geq 0 \\ K_i, \|x(k)\|_{Q_i^{-1}}^2 \leq 1 - w_{\max}, \|x(k)\|_{Q_{i+1}^{-1}}^2 > 1 - w_{\max}, i \neq N, p_{t_k} \geq 0 \\ K_N, \|x(k)\|_{Q_N^{-1}}^2 \leq 1 - w_{\max}, p_{t_k} \geq 0 \\ K_{t_{k-1}}, p_{t_k} < 0 \end{cases} \quad (4.3.10)$$

实际系统运行时, 在采样时刻 $t_k$ , 在线查表找到系统的实际状态值 $x_{t_k}$ 所在的位置并得到相应的控制律; 等到下一采样时刻 $t_{k+1}$ , 再根据 $t_{k+1}$ 时刻系统状态的位置重新求解新的控制律。

$t_k$ 时刻的控制律为

$$u(t_k) = K_{t_k}x(t_k) \quad (4.3.11)$$

在下一时刻 $t_{k+1}$ 到来之前,  $u(t_k)$ 将一直作用于系统。

**定理 4.3** 在每个采样时刻 $t_k$ , 根据“在线综合”的步骤求解 $t_k$ 时刻的控制律(4.3.11), 由该状态反馈控制律构成的闭环系统(4.2.3)

- 1) 内部渐近稳定;
- 2) 从外部扰动 $w(t)$ 到控制输出 $z_1(t)$ 的 $H_\infty$ 性能最小;
- 3) 满足时域约束(4.2.2);

### 4.3.2 离线优化的滚动时域 $H_\infty$ /广义 $H_2$ 悬架控制器设计

下面给出主动悬架离线优化的滚动时域 $H_\infty$ /广义 $H_2$ 控制器设计, 采用二自由度四分之一车主动悬架模型。根据第二章的讨论, 取控制输出 $z_1$ 为车身垂直加速度 $\ddot{x}_s$ , 约束



输出 $z_2$ 为悬架动行程、轮胎接地性和作动器输出饱和限制， $z_1$ 和 $z_2$ 分别：

$$z_1 = \ddot{x}_s, \quad z_2 = \begin{bmatrix} \frac{x_s - x_u}{S_{\max}} \\ \frac{k_u(x_u - x_r)}{(m_s + m_u)g} \\ \frac{u}{u_{\max}} \end{bmatrix} \quad (4.3.12)$$

式(4.3.12)中 $z_2$ 已归一化处理。

主动悬架系统方程如(4.2.31)描述。

### 4.3.3 仿真分析

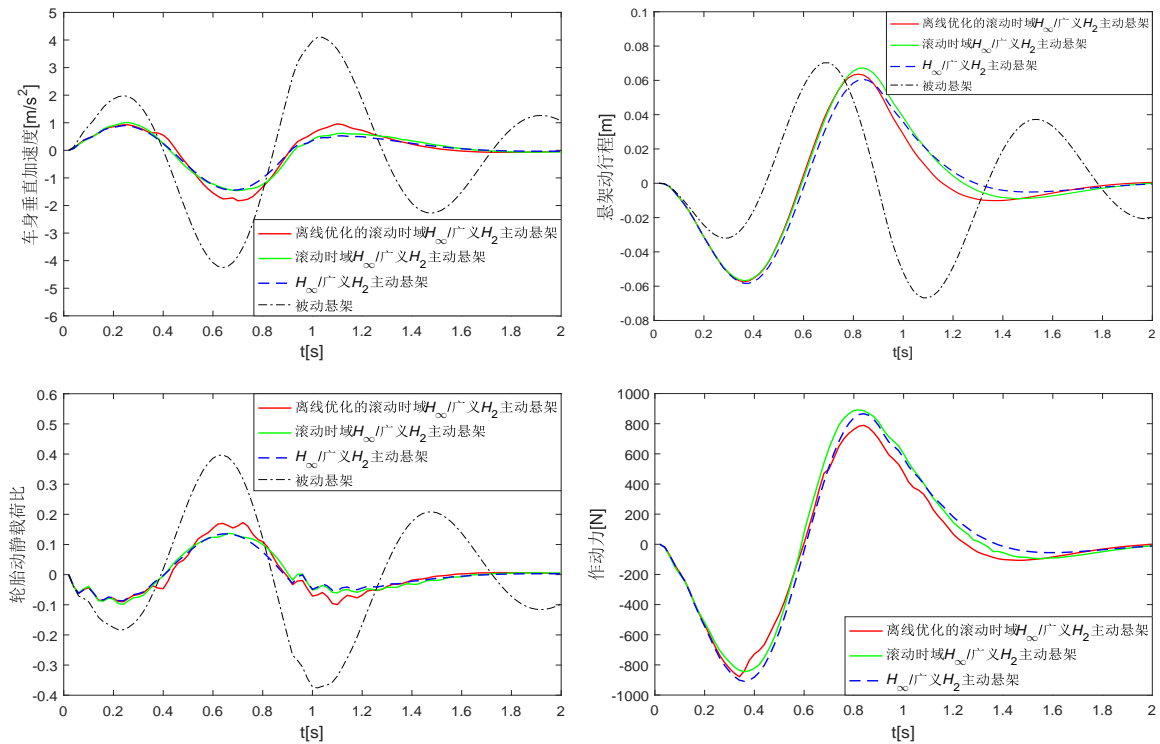


图 4.4 悬架凸块响应(仿真 $v = 20\text{km/h}$ )

图4.4、4.5 和4.6给出了离线优化的滚动时域 $H_\infty/\text{广义}H_2$ 主动悬架（红色实线）、滚动时域 $H_\infty/\text{广义}H_2$ 主动悬架（绿色实线）、 $H_\infty/\text{广义}H_2$ 主动悬架（蓝色虚线）和被动悬架（黑色点划线）的凸块响应仿真曲线，车速分别为低速 $20\text{km/h}$ 、中速 $40\text{km/h}$ 和高速 $65\text{km/h}$ 。仿真采用如式(2.1.3)描述的长坡形单凸块作为路面干扰，凸块高 $A_m = 0.1\text{m}$ ，宽 $L = 5\text{m}$ ，采样时间取 $0.02\text{s}$ ，仿真时长 $2\text{s}$ ，主动悬架参数见表4.1。

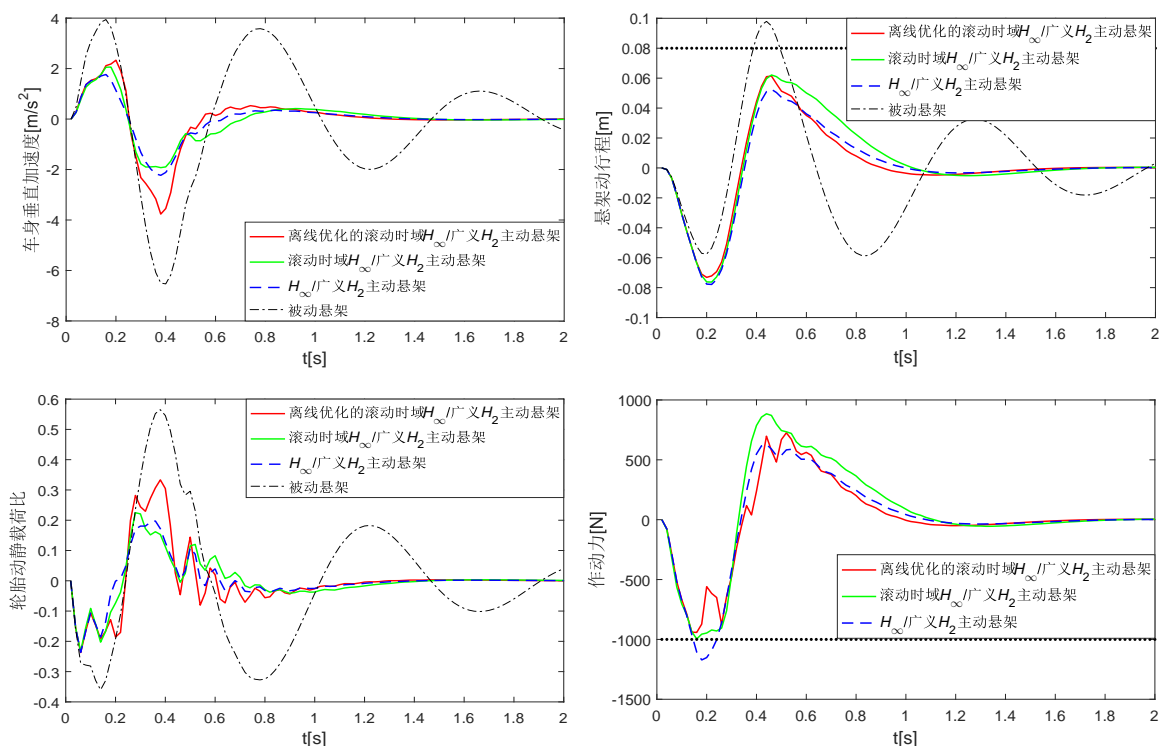


图 4.5 悬架凸块响应(仿真  $v = 40km/h$ )

表 4.4 车身垂直加速度RMS值

	20km/h	40km/h	65km/h
被动悬架	2.2030	2.4126	2.0804
$H_{\infty}/$ 广义 $H_2$ 主动悬架	0.6102	0.7141	0.7735
滚动时域 $H_{\infty}/$ 广义 $H_2$ 主动悬架	0.6663	0.7580	1.5736
离线优化的滚动时域 $H_{\infty}/$ 广义 $H_2$ 主动悬架	0.7636	1.0493	1.5473

从图4.4可以看到，车速20km/h时，离线优化的滚动时域 $H_{\infty}/$ 广义 $H_2$ 主动悬架、滚动时域 $H_{\infty}/$ 广义 $H_2$ 主动悬架和 $H_{\infty}/$ 广义 $H_2$ 主动悬架的响应曲线大体相同，均满足约束要求，都能够很好地改善乘坐舒适性。小扰动作用下，系统远离约束边界，离线优化的滚动时域 $H_{\infty}/$ 广义 $H_2$ 控制和滚动时域 $H_{\infty}/$ 广义 $H_2$ 控制以提高性能为主。

由图4.5和图4.6可知，车速40km/h和65km/h时， $H_{\infty}/$ 广义 $H_2$ 主动悬架有约束条件超出了限制，而离线优化的滚动时域 $H_{\infty}/$ 广义 $H_2$ 主动悬架和滚动时域 $H_{\infty}/$ 广义 $H_2$ 主动悬架在系统即将违背约束时主动调节避免了超出约束限制。65km/h时，离线优化的滚动时域 $H_{\infty}/$ 广义 $H_2$ 主动悬架和滚动时域 $H_{\infty}/$ 广义 $H_2$ 主动悬架的车身垂直加速度恶化，

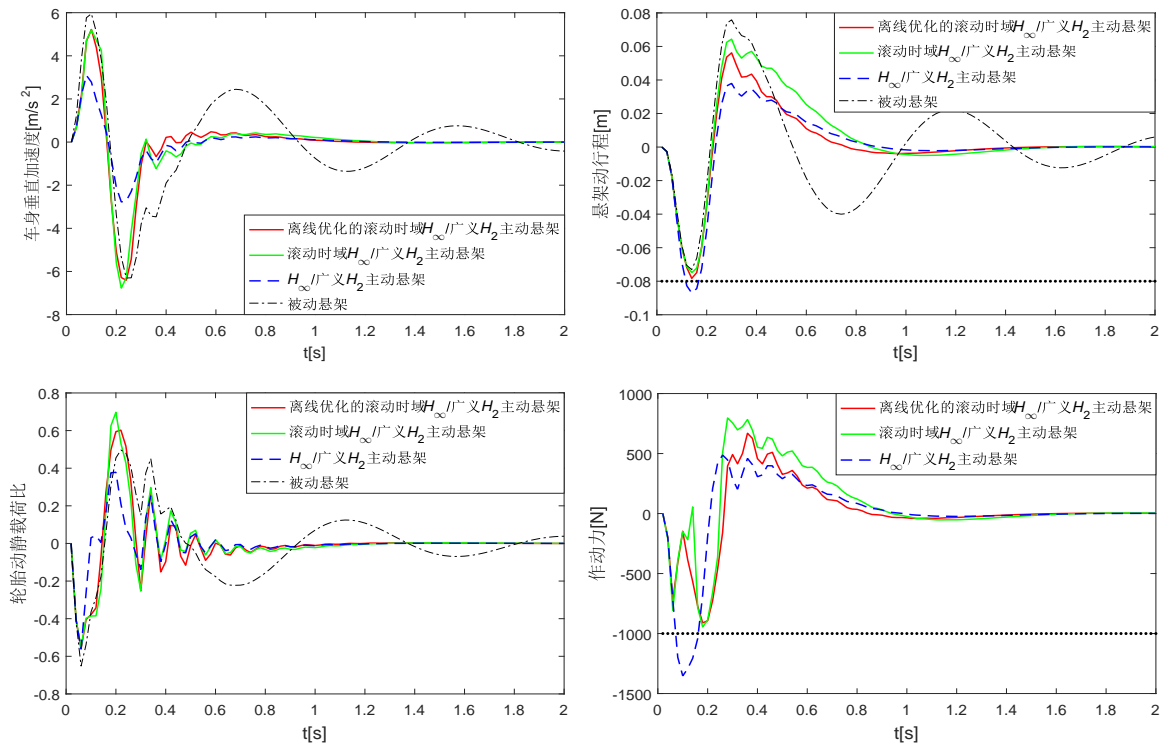


图 4.6 悬架凸块响应(仿真 $v = 65\text{km/h}$ )

此时大扰动作用下系统接近约束边界，离线优化的滚动时域 $H_\infty/\text{广义}H_2$ 控制和滚动时域 $H_\infty/\text{广义}H_2$ 控制降低性能来保证约束满足。

表 4.5 控制器平均求解时间

	20km/h	40km/h	65km/h
滚动时域 $H_\infty/\text{广义}H_2$ 主动悬架	8.167ms	8.371ms	8.211ms
离线优化的滚动时域 $H_\infty/\text{广义}H_2$ 主动悬架	0.112ms	0.078ms	0.08ms

从图4.5、图4.6、表4.4和表4.5中分析可知，虽然离线优化的滚动时域 $H_\infty/\text{广义}H_2$ 主动悬架的乘坐舒适性比滚动时域 $H_\infty/\text{广义}H_2$ 主动悬架略差，但离线优化的滚动时域 $H_\infty/\text{广义}H_2$ 主动悬架同样能保证约束满足，而且控制器实时计算复杂性低、求解时间大大加快，比滚动时域 $H_\infty/\text{广义}H_2$ 主动悬架控制器求解时间快得多得多，这大大有利于实现离线优化的滚动时域 $H_\infty/\text{广义}H_2$ 控制方法在实际悬架系统中的应用。

## 4.4 实验结果分析

上一小节仿真结果表明，离线优化的滚动时域 $H_\infty/\text{广义}H_2$ 主动悬架能取得比滚动时域 $H_\infty/\text{广义}H_2$ 主动悬架略微差点的性能，但仍然能够实时调节使系统始终满足约束条件且控制器在线求解时间显著降低。为进一步验证离线优化的滚动时域 $H_\infty/\text{广义}H_2$ 控制策略在实际系统中的控制效果，本小节在前文的研究基础上利用1/4车主动悬架硬件在环实验台，通过实验验证离线控制算法的有效性。

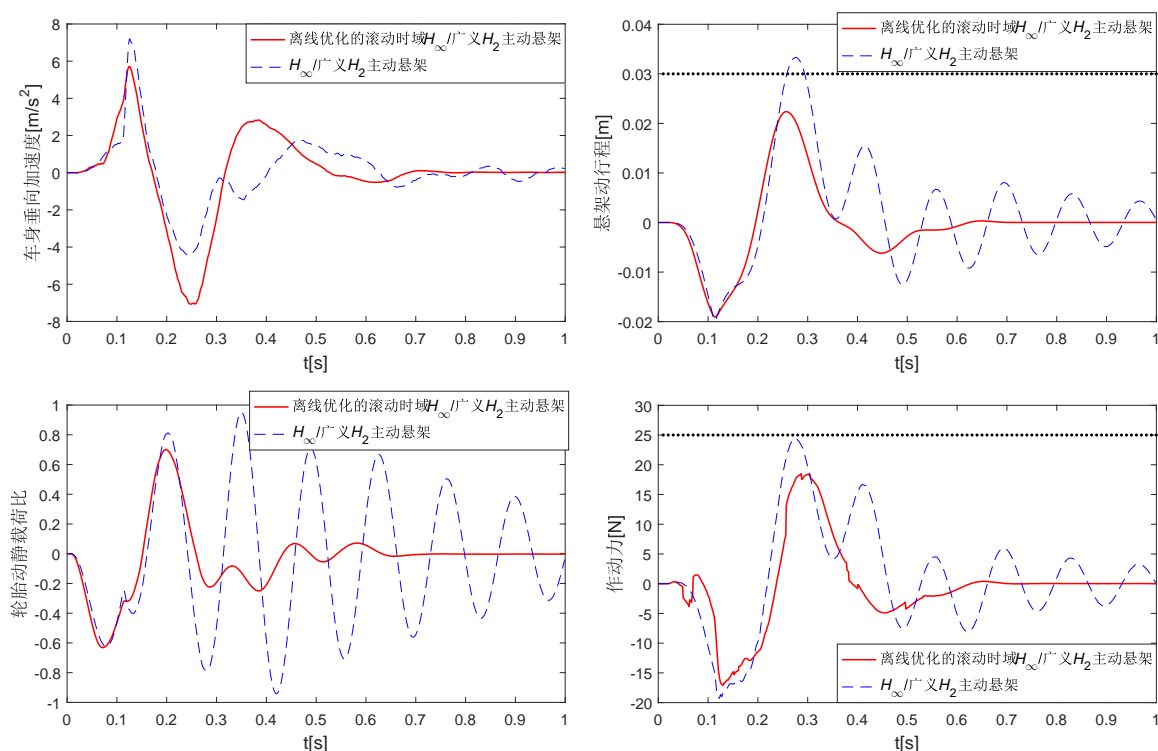
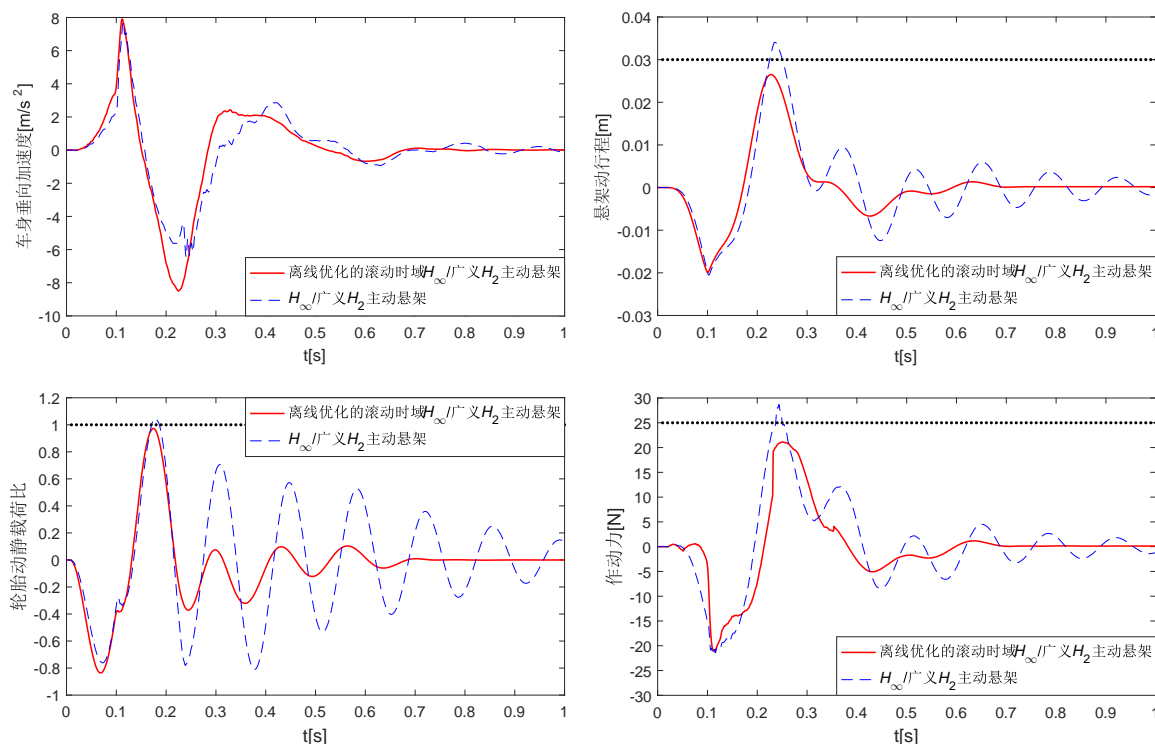


图 4.7 悬架凸块响应(实验 $v = 14km/h$ )

主动悬架实验台参数见表3.1，实验中路面干扰输入选择式(2.1.3)所描述的长坡形凸块路面。为了保护主动悬架实验台免受损坏、延长使用寿命，路面输入的最大位移(凸块的高)要低于主动悬架实验台底板运动的最大位移（如表3.1中 $X_{\max} = 0.036m$ ），因此实验中选择高 $A_m = 0.032m$ ，宽 $L = 1m$ 的凸块；另外实验中主动悬架控制器设计时选取的最大悬架动行程和最大作动力要低于实验台实际允许的最大数值（如表3.1所示），论文选择最大悬架动行程为 $S_{\max} = 0.03m$ ，最大作动力为 $u_{\max} = 25N$ 。车辆行驶速度 $v = 14km/h$ 和 $v = 17km/h$ ，实验时间为1s，主动悬架实

图 4.8 悬架凸块响应(实验 $v = 17\text{km/h}$ )

验台参数见表3.1。

由于滚动时域 $H_\infty$ /广义 $H_2$ 主动悬架在系统运行时控制器解算时长比系统采样时间更长，因此不能将其应用在主动悬架实验台的实时控制中。图4.7和4.8展示了离线优化的滚动时域 $H_\infty$ /广义 $H_2$ 主动悬架（实线）和固定 $H_\infty$ /广义 $H_2$ 主动悬架（虚线）的实验结果。可以看到，车速 $v = 14\text{km/h}$ 时， $H_\infty$ /广义 $H_2$ 主动悬架的悬架动行程超出了最大限制，车速 $v = 17\text{km/h}$ 时， $H_\infty$ /广义 $H_2$ 主动悬架的悬架动行程、轮胎动静载荷比和最大作动力均违背约束要求，而离线优化的滚动时域 $H_\infty$ /广义 $H_2$ 主动悬架各约束条件均保持在最大限制的范围内；离线优化的滚动时域 $H_\infty$ /广义 $H_2$ 主动悬架牺牲了乘坐舒适性来保证约束满足，因此图中离线优化的滚动时域 $H_\infty$ /广义 $H_2$ 主动悬架的车身垂向加速度要比 $H_\infty$ /广义 $H_2$ 主动悬架峰值高出许多。

## 4.5 本章小结

本章首先介绍了线性矩阵不等式的背景知识，接着基于广义 $H_2$ 范数描述系统约束、 $H_\infty$ 范数作为性能指标设计主动悬架 $H_\infty$ /广义 $H_2$ 控制策略，在此基础上，为了能

够兼顾主动悬架系统性能的提高和约束条件满足之间的关系，本章结合预测控制的思想设计了滚动时域 $H_\infty$ /广义 $H_2$ 控制方法，在每个采样时刻求解LMI 优化问题，但控制器解算时间长、在线计算量大，因此本章又提出了离线优化的滚动时域 $H_\infty$ /广义 $H_2$ 控制方法，不仅大大降低了控制器求解时间和计算负担，而且控制效果只比滚动时域 $H_\infty$ /广义 $H_2$ 的控制效果略微差一点。实验结果表明，在实际主动悬架系统的实时控制中离线优化的滚动时域 $H_\infty$ /广义 $H_2$ 控制方法能取得良好的控制效果。

## 第5章 $H_\infty$ /广义 $H_2$ 静态输出反馈控制主动悬架

上一章针对主动悬架系统设计了离线优化的滚动时域 $H_\infty$ /广义 $H_2$ 控制方法，该控制方法是基于状态反馈来实现的。状态反馈控制是采用系统的状态作为回馈量，系统的状态包含系统全面而丰富的信息，能够精确地描述系统的动态特性，因此基于状态反馈控制的闭环系统能够达到更佳的性能。在实际系统中，由于各种原因，系统的状态有时并不能够直接测量。有两种思路可以解决类似系统的控制问题，一是搭建可靠的状态观测器，将难以通过直接测量得到的状态用观测器实现状态重构，然后再用状态反馈控制的方法设计控制器；二是利用输出反馈控制方法。由于包含状态观测器的控制系统较为复杂、实施成本高且存在观测误差等原因，很难推广到实际系统中，因此，输出反馈控制受到了关注。输出反馈和状态反馈的反馈量不同，输出反馈是把系统的输出量作为反馈量，根据输出量设计控制器构成反馈律，实现对系统的闭环控制并达到期望的性能指标要求，这里的输出量能够通过测量直接获得。输出反馈控制有两种不同的方式：动态输出反馈控制<sup>[67, 68]</sup>和静态输出反馈控制<sup>[69, 70]</sup>。相较于动态输出反馈，静态输出反馈控制成本低廉、结构简单、系统可靠性高，因此在实际系统中得到了更加广泛的应用。

本章考虑利用 $H_\infty$ 衡量闭环系统的性能输出，利用广义 $H_2$ 范数处理系统的约束，给出了 $H_\infty$ /广义 $H_2$ 静态输出反馈控制方法。主动悬架的状态变量并不能全部被直接测量，因此本章将 $H_\infty$ /广义 $H_2$ 静态输出反馈控制方法应用于主动悬架控制器设计，仿真和硬件在环实验结果均表明该控制方法是有效的。

### 5.1 $H_\infty$ /广义 $H_2$ 静态输出反馈控制方法

不失一般性，考虑由如下状态方程描述的系统：

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_1w(t) + B_2u(t) \\ z_1(t) = C_1x(t) + D_{11}w(t) + D_{12}u(t) \\ z_2(t) = C_2x(t) + D_{21}w(t) + D_{22}u(t) \\ y(t) = C_3x(t) \end{cases} \quad (5.1.1)$$

其中 $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ 为状态变量， $w \in \mathbb{R}^{n_w}$ 为外部扰动， $u \in \mathbb{R}^{n_u}$ 为控制输入， $z_1 \in \mathbb{R}^{n_{z_1}}$ 为控制输出， $z_2 \in \mathbb{R}^{n_{z_2}}$ 为归一化的约束输出， $y \in \mathbb{R}^{n_y}$ 为测量输出， $C_3 \in \mathbb{R}^{n_y \times n_x}$ 是测量输出矩阵，是行满秩矩阵。假设 $D_{21} = 0$ ，表明外部输入 $w$ 不直接影响系统的约束输出 $z_2$ 。

系统的约束条件

$$\|z_2(t)\| \leq 1, \quad \forall t \geq 0 \quad (5.1.2)$$

**命题 5.1** 设计一个静态输出反馈控制器, 使得由被控对象(5.1.1)构成的闭环系统在能量有界扰动作用下内部稳定, 从干扰输入 $w(t)$ 到性能输出 $z_1(t)$ 的 $H_\infty$ 范数最小, 从 $w(t)$ 到 $z_2(t)$ 的广义 $H_2$ 范数小于1, 也即满足约束(5.1.2)。

引入静态输出反馈控制

$$u(t) = Fy(t) \quad (5.1.3)$$

其中 $F$ 为输出反馈增益, 将式(5.1.3)代入(5.1.1)得到闭环系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_{cl}x(t) + B_{cl}w(t) \\ z_1(t) = C_{1,cl}x(t) + D_{1,cl}w(t) \\ z_2(t) = C_{2,cl}x(t) + D_{2,cl}w(t) \end{cases} \quad (5.1.4)$$

式中

$$\begin{aligned} A_{cl} &= A + B_2FC_3, & B_{cl} &= B_1 \\ C_{1,cl} &= C_1 + D_{12}FC_3, & D_{1,cl} &= D_{11} \\ C_{2,cl} &= C_2 + D_{22}FC_3, & D_{2,cl} &= D_{21} \end{aligned}$$

**引理 5.1** 已知 $S \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ 是正定对称矩阵,  $M \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ 是行满秩矩阵( $m \leq n$ ), 则 $MSM^T$ 可逆。

**证明:**

证明 $MSM^T$ 可逆, 即证方程 $MSM^T X = 0$ 只有零解。

设 $MSM^T X = 0$ , 则 $X^T MSM^T X = 0$ , 也即 $(M^T X)^T S(M^T X) = 0$ , 由于 $S$ 是正定对称矩阵, 因此 $M^T X = 0$ , 同时有 $MM^T X = 0$ 成立, 又因为 $MM^T$ 可逆, 所以 $X = 0$ 。

综上所述, 方程 $MSM^T X = 0$ 只有零解, 即 $MSM^T$ 可逆, 引理得证。

**定理 5.1** 对于闭环系统(5.1.4), 给定 $\gamma > 0$ , 设计 $H_\infty$ /广义 $H_2$ 静态输出反馈控制器, 当存在合适维度的矩阵 $U$ 和正定对称矩阵 $Q$ , 使得下列LMI 优化问题

$$\underset{\gamma, Q, U}{\text{minimize}} \gamma^2 \quad \text{subject to} \quad (5.1.5)$$

$$\begin{bmatrix} AQ + QA^T + B_2UC_3 + (B_2UC_3)^T & B_1 & (C_1Q + D_{12}UC_3)^T \\ B_1^T & -I & D_{11}^T \\ C_1Q + D_{12}UC_3 & D_{11} & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (5.1.5a)$$



$$\begin{bmatrix} Q & (C_2Q + D_{22}UC_3)^T \\ C_2Q + D_{22}UC_3 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (5.1.5b)$$

有最优解 $(\gamma^*, Q^*, U^*)$ , 则相应的静态输出反馈控制器增益为 $F^* = U^*(V^*)^{-1}$ , 其中 $V^* = (C_3Q^*C_3^T)(C_3C_3^T)^{-1}$ , 且闭环系统(5.1.4)

- 1) 内部稳定;
- 2) 从外部干扰 $w(t)$ 到性能输出 $z_1(t)$ 的 $H_\infty$ 性能小于 $\gamma^*$ ;
- 3) 对于不超过单位能量的外部干扰, 系统满足约束(5.1.2);

**证明:**

在多目标框架下, 由引理4.2(有界实引理)可知,  $A_{cl}$ 内部稳定且从外部 $w(t)$ 到控制输出 $z_1(t)$ 的 $H_\infty$ 性能小于给定的正数 $\gamma$ , 这等价于当且仅当存在一个矩阵 $P = P^T > 0$ 满足

$$\begin{bmatrix} A_{cl}^T P + P A_{cl} & P B_{cl} & C_{1,cl}^T \\ B_{cl}^T P & -I & D_{1,cl}^T \\ C_{1,cl} & D_{1,cl} & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (5.1.6)$$

将 $A_{cl}, B_{cl}, C_{1,cl}, D_{1,cl}$ 代入矩阵不等式(5.1.6)得到

$$\begin{bmatrix} (A + B_2FC_3)^T P + P(A + B_2FC_3) & \# & \# \\ B_1^T P & -I & \# \\ C_1 + D_{12}FC_3 & D_{11} & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (5.1.7)$$

其中 $\#$ 表示对角线对称位置矩阵块的转置, 本文以下各矩阵不等式中的 $\#$ 表示的意义相同。使用 $\text{diag}\{P^{-1}, I, I\}$ 分别左乘和右乘不等式(5.1.7), 然后令 $Q = P^{-1}$ , 整理得到不等式

$$\begin{bmatrix} AQ + QA^T + B_2FC_3Q + (B_2FC_3Q)^T & \# & \# \\ B_1^T & -I & \# \\ C_1Q + D_{12}FC_3Q & D_{11} & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (5.1.8)$$

可以看到, 矩阵不等式(5.1.8)中存在两个未知矩阵变量 $F$ 和 $Q$ 的乘积形式, 通过研究发现很难采用如第四章的变量替换法将非线性矩阵不等式(5.1.8)转化为一个等价的线性矩阵不等式。为了解决这个为题, 我们设 $VC_3 = C_3Q$ ,  $U = FV$ , 并代入不等式(5.1.8), 即可得到关于 $(\gamma, Q, U)$ 的线性矩阵不等式<sup>[71]</sup>

$$\begin{bmatrix} AQ + QA^T + B_2UC_3 + (B_2UC_3)^T & \# & \# \\ B_1^T & -I & \# \\ C_1Q + D_{12}UC_3 & D_{11} & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (5.1.9)$$

也即是LMI优化问题(5.1.5)中的第一个不等式(5.1.5a)。

由引理4.3可知，从干扰 $w(t)$ 到约束输出 $z_2(t)$ 的广义 $H_2$ 范数小于1等价于存在一个正定对称矩阵 $P^\Delta$ 使LMI(5.1.10a)和(5.1.10b)成立，在多目标框架下令 $P^\Delta = P$

$$\begin{bmatrix} A_{cl}^T P + P A_{cl} & P B_{cl} \\ B_{cl}^T P & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (5.1.10a)$$

$$\begin{bmatrix} P & C_{2,cl}^T \\ C_{2,cl} & I \end{bmatrix} > 0 \quad (5.1.10b)$$

将 $A_{cl}, B_{cl}, C_{2,cl}$ 分别代入矩阵不等式(5.1.10a)和(5.1.10b)，得到

$$\begin{bmatrix} (A + B_2 F C_3)^T P + P(A + B_2 F C_3) & \# \\ B_1^T P & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (5.1.11a)$$

$$\begin{bmatrix} P & \# \\ C_2 + D_{22} F C_3 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (5.1.11b)$$

同时利用 $\text{diag}\{P^{-1}, I\}$ 分别左乘和右乘不等式(5.1.11a)和(5.1.11b)，然后令 $Q = P^{-1}$ ，整理得到以下不等式

$$\begin{bmatrix} A Q + Q A^T + B_2 F C_3 Q + (B_2 F C_3 Q)^T & \# \\ B_1^T & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (5.1.12a)$$

$$\begin{bmatrix} Q & \# \\ C_2 Q + D_{22} F C_3 Q & I \end{bmatrix} > 0 \quad (5.1.12b)$$

将 $V C_3 = C_3 Q$ 和 $U = F V$ 代入不等式(5.1.12a)和(5.1.12b)，即可得到

$$\begin{bmatrix} A Q + Q A^T + B_2 U C_3 + (B_2 U C_3)^T & \# \\ B_1^T & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (5.1.13a)$$

$$\begin{bmatrix} Q & \# \\ C_2 Q + D_{22} U C_3 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (5.1.13b)$$

通过观察可以看出，矩阵不等式(5.1.13a)内蕴于不等式(5.1.9)，因此只需求解包含不等式(5.1.9)和(5.1.13b)的优化问题即可，而不等式(5.1.13b)也即LMI优化问题(5.1.5)中的第二个矩阵不等式(5.1.5b)。

对于 $V C_3 = C_3 Q$ ，在等式的两边分别右乘 $C_3^T$ 得 $V C_3 C_3^T = C_3 Q C_3^T$ ，则 $V = (C_3 Q C_3^T)(C_3 C_3^T)^{-1}$ 。若证 $V$ 可逆，需证 $C_3 Q C_3^T$ 可逆。根据引理5.1可知， $C_3 Q C_3^T$ 可逆，因此 $V$ 可逆。

所以，如果LMI优化问题(5.1.5a)有最优解 $(\gamma^*, Q^*, U^*)$ ，则闭环系统(5.1.4)满足定理5.1中的三条结论。

定理得证。

## 5.2 主动悬架控制器设计

本节进行主动悬架 $H_\infty$ /广义 $H_2$ 静态输出反馈控制器设计, 采用的是如第二章建立的1/4车辆主动悬架模型。根据第二章的讨论, 取优化输出为车身垂直加速度, 约束输出为悬架动行程、轮胎接地性和作动器输出饱和限制,  $z_1$ 和 $z_2$ 分别是:

$$z_1 = \ddot{x}_s, \quad z_2 = \left[ \frac{x_s - x_u}{S_{\max}} \quad \frac{k_u(x_u - x_r)}{(m_s + m_u)g} \quad \frac{u}{u_{\max}} \right]^T \quad (5.2.1)$$

式(5.2.1)中的约束输出 $z_2$ 已归一化处理。

选取悬架动行程和车身速度(簧载质量速度)作为测量输出 $y$

$$y = \left[ x_s - x_u \quad \dot{x}_s \right]^T \quad (5.2.2)$$

主动悬架系统的方程为:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_1w(t) + B_2u(t) \\ z_1(t) = C_1x(t) + D_{11}w(t) + D_{12}u(t) \\ z_2(t) = C_2x(t) + D_{21}w(t) + D_{22}u(t) \\ y(t) = C_3x(t) \end{cases} \quad (5.2.3)$$

式(5.2.3)中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -\frac{k_s}{m_s} & -\frac{c_s}{m_s} & 0 & \frac{c_s}{m_s} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_s}{m_u} & \frac{c_s}{m_u} & -\frac{k_u}{m_u} & -\frac{c_s}{m_u} \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{m_s} & 0 & -\frac{1}{m_u} \end{bmatrix}^T$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} -\frac{k_s}{m_s} & -\frac{c_s}{m_s} & 0 & \frac{c_s}{m_s} \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{S_{\max}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{k_u}{(m_s + m_u)g} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D_{11} = 0, \quad D_{12} = \frac{1}{m_s}, \quad D_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad D_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{u_{\max}} \end{bmatrix}^T$$

## 5.3 仿真结果分析

本章主动悬架系统的路面干扰输入依旧选择如式(2.1.3)描述的长坡形凸块路面, 本小节仿真采用高为 $A_m = 0.1m$ , 宽为 $L = 5m$ 的凸块, 同样取采样时间为 $0.02s$ , 仿真时长 $2s$ 。主动悬架各参数值见表4.1, 其中悬架动行程和作动器输出最大值分别为 $S_{\max} = 0.08m$ 和 $u_{\max} = 1000N$ 。设车辆行驶速度 $v = 30km/h$ , 图5.1给出了 $H_\infty$ /广义 $H_2$ 静态输出反馈控制主动悬架(实线)和被动悬架(点划线)驶过凸块时的响应曲线。

从图5.1中能够看出，被动悬架已经撞击限位块，而 $H_\infty$ /广义 $H_2$ 静态输出反馈控制的主动悬架依然满足悬架动行程、轮胎动静载荷比、作动力等约束要求；相较于同一路况下的被动悬架来说，主动悬架的车身垂直加速度响应调节时间更短，幅值更低，显著地提高了乘坐舒适性。通过对表5.1中车身垂直加速度均方根值的分析亦可以看出， $H_\infty$ /广义 $H_2$ 静态输出反馈控制主动悬架相较于被动悬架大大改善了乘坐舒适性。

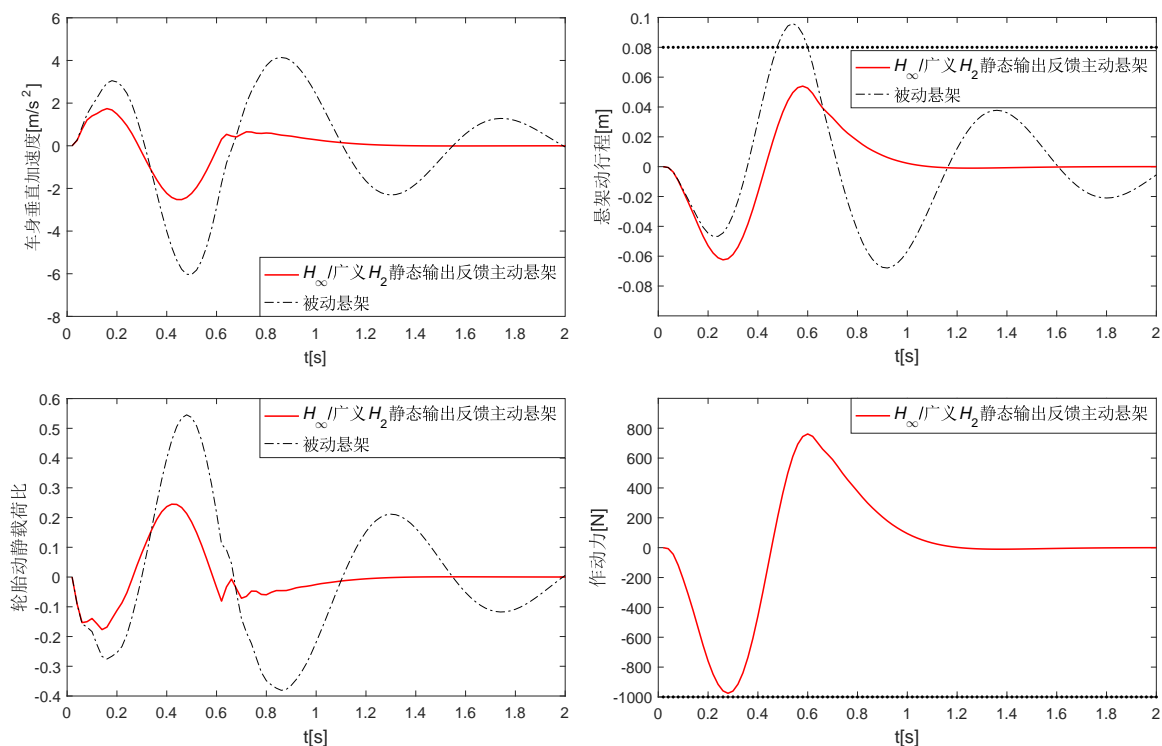


图 5.1 悬架凸块响应（仿真 $v = 30km/h$ ）

表 5.1 车身垂直加速度RMS值（仿真）

	被动悬架	$H_\infty$ /广义 $H_2$ 静态输出反馈主动悬架
$v = 30km/h$	2.5147	0.8722

## 5.4 实验结果分析

本小节将利用第三章介绍的主动悬架硬件在环实验平台对本章所设计的主动悬架 $H_\infty$ /广义 $H_2$ 静态输出反馈控制算法的有效性进行进一步验证。

路面干扰输入选择式(2.1.3)所描述的长坡形凸块路面，采用和4.3节中悬架实验所用相同大小的凸块，高 $A_m = 0.032m$ ，宽 $L = 1m$ 。车辆行驶速度 $v = 12km/h$ 和 $v = 13km/h$ ，实验时间1s，主动悬架实验台参数见表3.1。为了保护主动悬架实验台免受损坏，主动悬架控制器设计时选取的最大悬架动行程和最大作动力要低于悬架实验台实际允许的最大数值（如表3.1所示），选择最大悬架动行程为 $S_{max} = 0.03m$ ，最大作动力为 $u_{max} = 25N$ 。

图5.2和5.3给出了 $H_\infty/H_2$ 静态输出反馈控制主动悬架（实线）和被动悬架（点划线）的实验结果，表5.2展示的是车身垂直加速度均方根值的实验值。

经过对图5.2、5.3和表5.2的分析可以得到和仿真试验同样的结论： $H_\infty/H_2$ 静态输出反馈控制的主动悬架的约束输出能够得到满足；同时相比被动悬架，乘坐舒适性得到明显地改善。

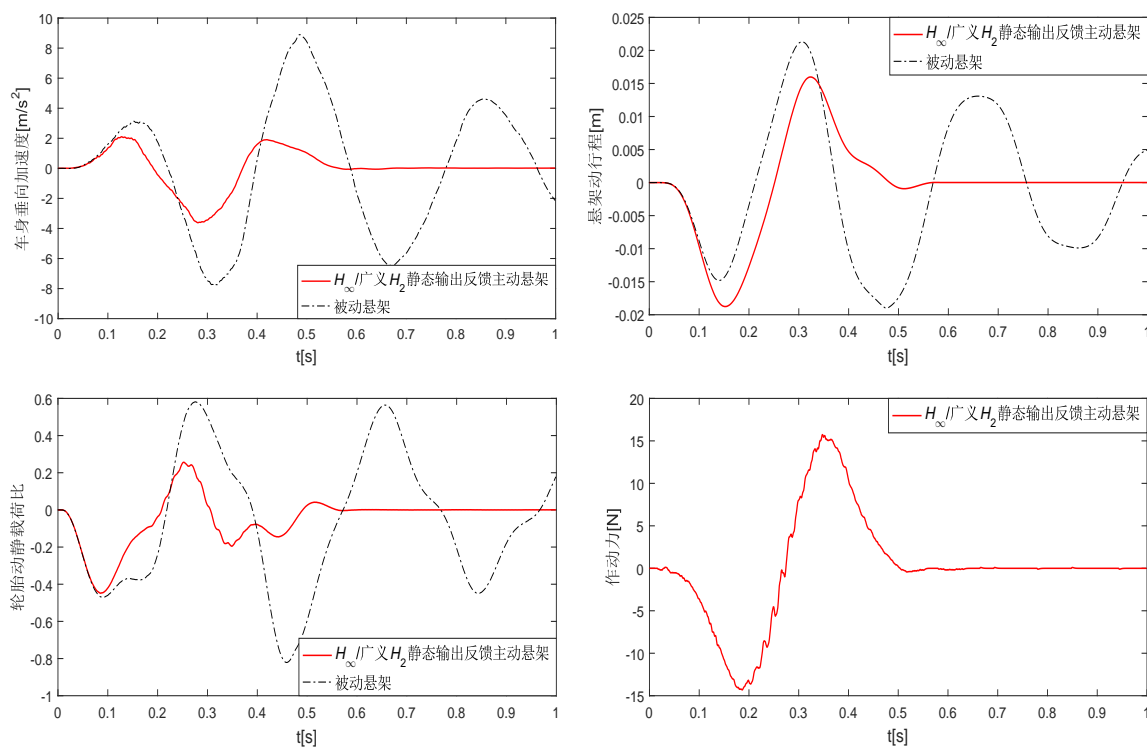


图 5.2 悬架凸块响应（实验 $v = 12km/h$ ）

## 5.5 本章小节

由于在实际中主动悬架系统的状态中只有部分状态能被直接测量，本章提出

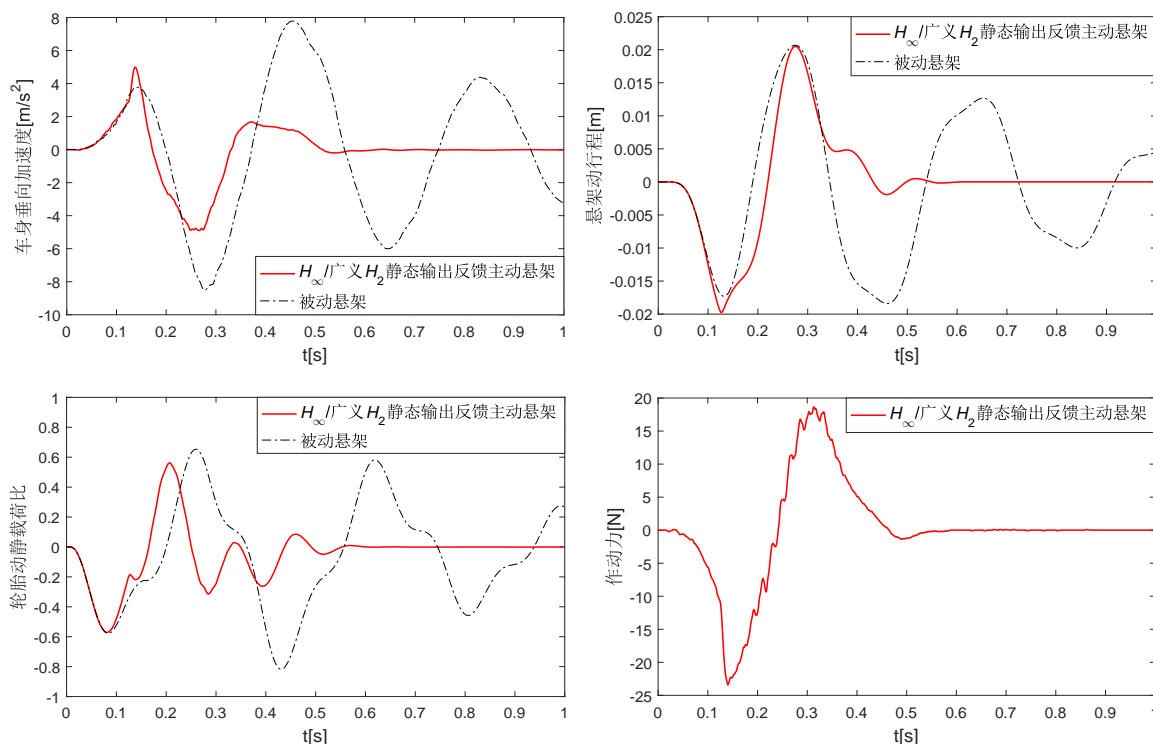


图 5.3 悬架凸块响应 (实验  $v = 13km/h$ )

表 5.2 车身垂直加速度RMS值 (实验)

	被动悬架	$H_{\infty}/\text{广义}H_2$ 静态输出反馈主动悬架
$v = 12km/h$	4.3020	1.2618
$v = 13km/h$	4.1431	1.6789

了 $H_{\infty}/\text{广义}H_2$ 静态输出反馈控制策略，利用有限的状态信息作为反馈量进行主动悬架控制器设计，控制器以 $H_{\infty}$ 范数优化性能输出，以广义 $H_2$ 描述系统约束。 $H_{\infty}/\text{广义}H_2$ 静态输出反馈控制的主动悬架能够满足系统约束并很好地改善车辆的乘坐舒适性，仿真和实验结果均验证了该控制方法的可行性和有效性。

## 第6章 全文总结与展望

### 6.1 全文总结

社会的进步和发展使得汽车成为民众的主要交通工具，民众对于汽车的要求也在不断地提高，特别是在乘坐舒适性以及行车安全性方面。传统的被动悬架已经不能满足人们对汽车性能的要求，这就亟需研究人员研发、设计出一款能够根据不同的行驶路况自动调节、抑制振动的主动悬架系统。

本文以1/4车辆主动悬架为研究对象，以线性矩阵不等式为工具，考虑乘坐舒适性以及轮胎接地性、悬架安全、执行机构输出饱和等实际约束，通过理论设计、仿真分析和硬件在环实验探讨了主动悬架系统的多目标控制问题。

本文以 $H_\infty$ 范数作为性能输出的优化指标，利用广义 $H_2$ 范数在时域内捕捉系统硬约束，对系统约束输出峰值直接限幅。针对滚动时域 $H_\infty$ /广义 $H_2$ 控制器求解耗时多、在线计算量大的问题，本文提出了离线优化的滚动时域 $H_\infty$ /广义 $H_2$ 控制方法，该方法大大降低了在线计算量，缩短了控制器求解时间，而且能够兼顾控制性能提高与约束满足的矛盾关系，在大扰动作用下也能保证满足系统约束。实验结果显示，在主动悬架系统的实时控制中离线优化的滚动时域 $H_\infty$ /广义 $H_2$ 控制方法能取得良好的控制效果。

针对实际悬架系统中只有部分状态量能直接测量得到的问题，本文设计了 $H_\infty$ /广义 $H_2$ 静态输出反馈控制策略，利用有限的状态信息作为控制系统的反馈量，仿真和硬件在环实验结果均表明了该控制方法是可行的且具有良好的控制效果。

### 6.2 工作展望

论文研究了主动悬架 $H_\infty$ /广义 $H_2$ 控制，主要是离线优化的滚动时域 $H_\infty$ /广义 $H_2$ 控制方法和 $H_\infty$ /广义 $H_2$ 静态输出反馈控制方法。虽然仿真和实验结果均表明这两种控制方法具有良好的控制效果和一定的优越性，但还有以下内容值得继续深入研究：

1) 本文建立的1/4车二自由度主动悬架模型只有一个车轮，只能考虑汽车的垂向运动，不能考虑汽车的俯仰和侧倾运动，因此不能比较全面地研究车辆系统各方面的特性如姿态控制，下一步可基于半车模型或七自由度全车模型进行主动悬架各方面性能的研究。

2) 本文第四章提出的主动悬架离线优化的滚动时域 $H_\infty$ /广义 $H_2$ 控制策略虽然不仅能够不断地协调提高控制性能和满足约束的矛盾关系,而且控制器求解简单、耗时短,在线计算量小,但该方法是基于状态反馈来设计的,而主动悬架系统的状态不能全部直接测量。另外,本文第五章研究的主动悬架 $H_\infty$ /广义 $H_2$ 静态输出反馈控制策略只能在路面干扰的能量低于某个数值的情况下才能保证悬架系统约束不超出限制,一旦路面干扰能量过大,该方法将不能保证约束满足。因此,下一步将研究基于输出反馈的主动悬架离线优化的滚动时域 $H_\infty$ /广义 $H_2$ 控制策略。

3) 本文对主动悬架控制策略的研究目前尚只停留在实验台实验阶段,未进行实车试验,接下来可对主动悬架实车进行控制策略的试验验证。



## 参 考 文 献

- [1] 陈家瑞. 汽车构造(第三版)[M]. 北京: 机械工业出版社, 2005.
- [2] 寇发荣, 方宗德. 汽车可控悬架系统的研究进展[J]. 汽车工程, 2007, 29(5): 426-431.
- [3] CHEN J, OU J F, LUO X Z, LIU D H. The Research & Development Trends of Automotive Active Suspension[J]. Automobile Parts, 2010, 64-67.
- [4] TSENG H E, HROVAT D. State of the Art Survey: active and Semi-active Suspension Control[J]. Vehicle System Dynamics, 2015, 53(7): 1034-1062.
- [5] SAVARESI S M, POUSSOT-VASSAL C, SPELTA C, SENAME O, DUGARD L. Semi-active Suspension Control Design for Vehicles[M]. China: Elsevier Ltd, 2010.
- [6] 殷琚. 电磁馈能式主动悬架研究与开发[D]. 同济大学, 上海, 2017.
- [7] UNGER A, SCHIMMACK F, LOHMANN B, SCHWARZ R. Application of LQ-based Semi-active Suspension Control in a Vehicle[J]. Control Engineering Practice, 2013, 21(12): 1841-1850.
- [8] ZHANG J W, CHEN S Z, ZHAO Y Z. Active Suspension with Optimal Control Based on a Full Vehicle Model[J]. Journal of Beijing Institute of Technology, 2016, 25(1): 81-90.
- [9] CHEN S A, CAI Y M, WANG J, YAO M. A Novel LQG Controller of Active Suspension System for Vehicle Roll Safety[J]. International Journal of Control, Automation and Systems, 2018, 16(5): 2203-2213.
- [10] CHEN S H, CHOU J H, ZHENG L A, LIN S K. Design of Robust-stable and Quadratic Finite-horizon Optimal Controllers with Low Trajectory Sensitivity for Uncertain Active Suspension Systems[J]. Vehicle System Dynamics, 2010, 48(8): 945-965.
- [11] GOPALA RAO L V V, NARAYANAN S. Sky-hook Control of Nonlinear Quarter Car Model Traversing Rough Road Matching Performance of LQR Control[J]. Journal of Sound Vibration, 2009, 323(3): 515-529.

- [12] PANG H, FU W Q, LIU K, LI Q. Modeling and Stability Analysis of Semi-Active Suspension with Sky-hook Control[J]. *Automotive Engineering*, 2015, 37(10): 1167-1173.
- [13] ZHANG L, ZHANG J Q, PENG Z Z, BI Z D, HUANG D S. Improved Sky-hook Damping Control Algorithm for Semi-active Vehicle Suspensions[J]. *Automotive Engineering*, 2015, 37(8): 931-935.
- [14] GOMONWATTANAPANICH O, PANNUCHAROENWONG N, RATTANADECHO P, ECHAROJ S, HEMATHULIN S. Vibration Control of Vehicle by Active Suspension with LQG Algorithm[J]. *International Journal of Automotive and Mechanical Engineering*, 2020, 17(2): 8011-8018.
- [15] GUO Y H, WANG B, TKACHEV A, ZHANG N. An LQG Controller Based on Real System Identification for an Active Hydraulically Interconnected Suspension[J]. *Mathematical Problems in Engineering*, 2020, (10): 1-10.
- [16] 叶光湖, 盛云, 吴光强. 考虑人体坐姿模型的汽车主动悬架最优控制[J]. *汽车技术*, 2013, (4): 6-9.
- [17] 周瑜. 某轿车车身姿态半主动悬架最优控制研究[D]. 吉林大学, 长春, 2016.
- [18] 张玉峰, 龙金莲, 李婧, 卢家暄. 基于免疫粒子群优化的主动悬架LQG 控制研究[J]. *计算机工程与应用*, 2018, 54(6): 252-256.
- [19] 胡一明, 李以农, 李哲, 杨超. 主被动一体悬架构型的多目标粒子群最优控制[J]. *控制理论与应用*, 2020, 37(3): 574-583.
- [20] 潘成龙, 荣吉利, 项大林, 郑育龙. 9自由度主动悬架平顺性研究[J]. *北京理工大学学报*, 2018, 39(10): 1012-1017.
- [21] HUANG Y B, NA J, WU X, LIU X Q, GUO Y. Adaptive Control of Nonlinear Uncertain Active Suspension Systems with Prescribed Performance[J]. *Isa Transactions*, 2015, 54: 145-155.
- [22] ZHANG Y, LIU L. Adaptive Fault Tolerant Control of Active Suspension Systems with Time-varying Displacement and Velocity Constraints[J]. *IEEE Access*, 2020, 8: 10847-10856.

- [23] ZHANG Y, LIU Y, LIU L. Minimal Learning Parameters-based Adaptive Neural Control for Vehicle Active Suspensions with Input Saturation[J]. *Neurocomputing*, 2020, 396: 153-161.
- [24] 王洪亮. 磁流变阻尼器半主动悬架系统的自适应控制[D]. 哈尔滨工业大学, 哈尔滨, 2020.
- [25] UTKIN V. Variable Structure Systems with Sliding Modes[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, 22(2): 212-222.
- [26] 刘金琨. 滑模变结构控制MATLAB仿真[M]. 北京: 清华大学出版社, 2005.
- [27] 秦武, 朱钢, 上官文斌, AHMED WAIZUDDIN. Integral Sliding Mode Control for Active Suspension Systems of Half-vehicle Model[J]. *Mechanical Engineering Journal*, 2015, 2(3): 1-12.
- [28] RATH J J, DEFOORT M, SENTOUH C, KARIMI H R, VELUVOLU K C. Output Constrained Robust Sliding Mode Based Nonlinear Active Suspension Control[J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2020, 67(12): 10652-10662.
- [29] YANG C Y, XIA J W, JU H P, SHEN H, WANG J. Sliding Mode Control for Uncertain Active Vehicle Suspension Systems: an Event-triggered  $H_\infty$  Control Schemew[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2020, 103(8): 3209-3221.
- [30] CHEN W W, MILLS J K, WU L. Neurofuzzy and Fuzzy Control of Automotive Semi-active Suspensions[J]. *International Journal of Vehicle Autonomous Systems*, 2003, 1(2): 222-236.
- [31] KHAN L, QAMAR S, KHAN M U. Adaptive Wavelets Based Fuzzy NN Control for Active Suspension Model[J]. *Emerging Trends and Applications in Information Communication Technologies*, 2012, 281: 246-260.
- [32] LIU L, LI X S, LIU Y J, TONG S C. Neural Network Based Adaptive Event Trigger Control for a Class of Electromagnetic Suspension Systems[J]. *Control Engineering Practice*, 2021, 106: 1-10.
- [33] LIU Y J, ZENG Q, TONG S C, CHEN C. L. PHILIP, LIU L. Adaptive Neural Network Control for Active Suspension Systems with Time-varying Vertical Displacement and Speed Constraints[J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2019, 66(12): 9458-9466.

- [34] SHEHATA A, METERED H, ORABY WALID A H. Vibration Control of Active Vehicle Suspension System Using Fuzzy Logic Controller[J]. Vibration Engineering and Technology of Machinery, 2015, 23: 389-399.
- [35] MIN X, LI Y M, TONG S C. Adaptive Fuzzy Optimal Control for a Class of Active Suspension Systems with Full-state Constraints[J]. IET Intelligent Transport Systems, 2020, 14(5): 371-381.
- [36] 李景阳, 王伟. 基于AMESim的汽车主动悬架系统的仿真与优化分析[J]. 河南科技, 2014, 7: 86-87.
- [37] AFSHAR K K, JAVADI A, JAHED-MOTLAGH M R. Robust  $H_\infty$  Control of an Active Suspension System with Actuator Time Delay by Predictor Feedback[J]. IET Control Theory & Applications, 2018, 12(7): 1012-1023.
- [38] ABDELLARI E, MEHDI D, M'SAAD M. On the Design of Active Suspension System by  $H_\infty$  and Mixed  $H_2/H_\infty$ : an LMI Approach[C]. Proceeding of the American Control Conference, 2000, 6: 4041-4045.
- [39] BADRAN S M. Robust LMI-based Controller Design Using  $H_\infty$  and Mixed  $H_2/H_\infty$  for Semi-active Suspension System[J]. International Journal of Computational Engineering Research, 2012, 2(8): 172-180.
- [40] ORUKPE P E, ZHENG X, JAIMOUKHA I M, ZOLOTAS A C, GOODALL R M. Model Predictive Control Based on Mixed  $H_2/H_\infty$  Control Approach for Active Vibration Control of Railway Vehicles[J]. Vehicle System Dynamics, 2008, 46(1): 151-160.
- [41] AKCAR H, TURKAY S. Influence of Tire Damping on Mixed  $H_2/H_\infty$  Synthesis of Half-car Active Suspensions[J]. Journal of Sound and Vibration, 2009, 322(1): 15-28.
- [42] 陈虹, 赵桂军, 孙鹏远, 郭孔辉.  $H_2$ 和 $H_\infty$ 主动悬架统一的理论框架与比较[J]. 汽车工程, 2003, 25(1): 1-6.
- [43] SCHERER C, GAHINET P. Multiobjective Output-feedback Control via LMI Optimization[J]. IEEE Transactions Automatica Control, 1996, 42(7): 869-911.
- [44] CHEN H, SUN P Y, GUO K H. A Multi-objective Control Design for Active Suspensions with Hard Constrains[J]. Proceeding of the American Control Conference, 2003, 5: 4371-4376.

- [45] 于树友, 马苗苗, 陈虹. 基于LMI优化的 $H_\infty$ /广义 $H_2$ 输出反馈主动悬架控制[J]. 南京航空航天大学学报, 2006, 36: 25-29.
- [46] 陈虹, 马苗苗, 孙鹏远. 主动悬架 $H_2$ /广义 $H_2$ 输出反馈控制[J]. 控制理论与应用, 2007, 24(5): 790-794.
- [47] CHEN H, SCHERER C. Moving Horizon  $H_\infty$  Control with Performance Adaptation for Constrained Linear Systems[J]. Automatica, 2006, 42(6): 1033-1040.
- [48] BOHM C, YU S Y, ALLGOWER F. Moving Horizon  $H_\infty$  Control of Constrained Periodically Time-varying Systems[J]. IFAC Proceedings Volumes, 2011, 44(1): 10156-10161.
- [49] WANG J, LIU Z Y, CHEN H, PEI R. Output Feedback  $H_\infty$  Control Combining Moving Horizon Scheme for Active Suspension Based on LMI Approach[J]. Automotive Engineering, 2009, 31(1): 37-41.
- [50] WANG J, LIU Z Y, CHEN H, YU S Y, PEI R.  $H_\infty$  Output Feedback Control of Constrained Systems via Moving Horizon Strategy[J]. Acta Automatica Sinica, 2007, 33(11): 1176-1181.
- [51] 于树友, 陈虹. 基于滚动优化的 $H_\infty$ /广义 $H_2$ 主动悬架控制[J]. 吉林大学学报(工学版), 2007, 27(5): 1164-1169.
- [52] ZHAO F, GE S Z, SAM, TU F W, QIN Y H. Adaptive Neural Network Control for Active Suspension System with Actuator Saturation[J]. IET Control Theory and Applications, 2016, 10(14): 1696-1705.
- [53] WANG J, WILSON D A. Mixed  $GL_2/H_2/GH_2$  Control with Pole Placement and Its Application to Vehicle Suspension Systems[J]. International Journal of Control, 2001, 74(13): 1353-1369.
- [54] GUO L X. Robust  $H_\infty$  Control of Active Vehicle Suspension under Non-stationary Running[J]. Journal of Sound and Vibration, 2012, 331(26): 5824-5837.
- [55] WANG J, WILSON D A, HALIKIAS G D.  $H_\infty$  Robust-performance Control of Decoupled Active Suspension Systems Based on LMI Method[C]. Proceeding of the American Control Conference, 2001, 4: 2658-2663.
- [56] 余志生. 汽车理论[M]. 北京: 机械工业出版社, 1999.

- [57] ZHOU K M, DOYLE J, GLOVER K. Robust and Optimal Control[M]. Upper Saddle River, New Jersey: Prentice Hall, 1996.
- [58] BOYD S, GHAOUI L E, FERON E, BALAKRISHNAN V. Linear Matrix Inequalities in System and Control theory[M]. Philadelphia: Studies in Applied Mathematics(SIAM), 1994.
- [59] SCHERER C, WEILAND S. Linear Matrix Inequalities in Control[M]. 2015.
- [60] MASUBUCHI I, OHARA A, SUDA N. LMI-based Controller Synthesis: a Unified Formulation and Solution[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 1998, 8(8): 669-686.
- [61] SKOGESTAD S, POSTLETHWAITE I. Multivariable Feedback Control: analysis and Design[M]. New York: John Wiley & Sons, 1996.
- [62] 席裕庚, 朱红林, 李德伟. 基于多面体不变集的离线鲁棒预测控制器综合[J]. 控制与决策, 2009, 24(2): 187-190.
- [63] 平续斌, 丁宝苍. 动态输出反馈鲁棒模型预测控制离线算法[J]. 自动化学报, 2013, 39(6): 790-799.
- [64] 万慧雯, 何真, 曹瑞, 胡舟逸. 无人机栖落机动的一种离线鲁棒预测控制算法[J]. 南京航空航天大学学报, 2019, 51(6): 785-794.
- [65] WAN Z, KOTHARE M V. An Efficient Off-line Formulation of Robust Model Predictive Control Using Linear Matrix Inequalities[J]. Automatica, 2000, 39(5): 837-846.
- [66] MORADI S M, AHMAD A, MEHDI M. An Offline LMI-based Robust Model Predictive Control of Vehicle Active Suspension System with Parameter Uncertainty[J]. Transactions of the Institute of Measurement and Control, 2018, 41(12): 1-13.
- [67] LIU Y, JIA Y M, DU J P, YUAN S Y. Dynamic Output Feedback Control for Consensus of Multi-agent Systems: an  $H_\infty$  Approach[C]. Proceeding of the American Control Conference, 2009, 4470-4475.
- [68] CAIGNY J D, CAMINO J F, OLIVEIRA R C L F, PERES P L D, SWEVERS J. Gain-scheduled Dynamic Output Feedback Control for Discrete-time LPV Systems[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2012, 22(5): 535-558.

- [69] BOUKAS E K. Static Output Feedback Control for Stochastic Hybrid Systems: LMI Approach[J]. Automatica, 2006, 42(1): 183-188.
- [70] GADEWADIKAR J, LEWIS F L, SUBBARAO K, PENG K, CHEN B M.  $H_\infty$  Static Output-feedback Control for Rotorcraft[J]. Journal of Intelligent and Robotic Systems, 2009, 54(4): 629-646.
- [71] 姚波, 谷美萱, 王福忠, 何新. 基于扇形区域极点配置的静态输出反馈 $H_\infty$ 控制[J]. 沈阳师范大学学报(自然科学版), 2019, 37(3): 198-202.





## 攻读硕士学位期间的研究成果

### 作者简介：

作者：曹瑞丽，女，1995年2月生于河南省周口市，汉族。2014年至2018年于长春工业大学电气与电子工程学院进行本科学习，专业自动化。2018年9月于吉林大学通信工程学院控制工程专业攻读硕士研究生，主要研究方向为汽车悬架控制。

### 攻读硕士学位期间参加的科研项目：

1. 永磁同步电机提高扭矩控制精度及稳定性的算法研究，江苏省新能源汽车动力系统重点实验室项目，项目编号：JKLNEVPS201901。
2. 智能网联商用车多车协同控制理论及关键技术，国家自然科学基金委-中国汽车产业创新发展联合基金，项目编号：U1964202。
3. 高效轻量化轮毂直驱电动轮总成关键技术研究与应用，国家重点研究发展计划，项目编号：2018YFB0104804。

### 攻读硕士学位期间发表的论文：

1. 于树友, 曹瑞丽, 刘清宇, 曲婷, 陈虹. 具有双层控制结构的馈能悬架输出反馈控制策略[J]. 吉林大学学报(工学版), 2020, 50(4): 1191-1200.(EI)

### 鸣谢：

在此特别感谢吉林大学汽车工程学院庄晔教授对本论文提供的实验设备的支持。



## 致谢

三年时光若白驹之过隙，忽然而已。研究生生活就要结束，也即将告别二十年的校园生活，这三年里我收获良多，也迅速成长，不仅加深了对专业研究的认识，更是遇到了一群可爱的人，感谢研究生期间发生的种种，感谢遇到的每一个人。

首先要感谢我最敬爱的导师于树友教授，在三年的研究生生涯里，于树友老师都给予了我极大的指导和帮助，感谢您为我们提供了这么好的科研学习平台，感谢您在生活和工作中的温暖关怀和悉心指导。是您的严谨治学使实验室洋溢着浓厚的科研氛围，是您的精益求精使实验室的整体科研水平节节升高，是您的和蔼可亲使实验室每个人都倍感温暖！祝您身体健康，工作顺利。

其次，感谢同组的曲婷老师，感谢您在组会报告、研究生开题、中期、以及最终答辩中给予的宝贵的意见和建议，感谢您在生活方面的关心和帮助，祝您事业有成，家庭美满。

感谢我的同窗褚建新、徐明生、李建普和陈浩，感谢你们对我科研工作中的帮助，感谢你们对我生活中的关心，感谢你们一直陪在我身边，陪我一起经历这一段难忘的科研生活，祝你们学业有成，工作顺利。

感谢刘清宇、冯阳阳、刘艺、张健建、Usman师兄对我的课题研究给予的建议和帮助，感谢周雨、王伍洋、施竹清、孟凌宇、厉庆华、郭杰师姐对我的关心与照顾；感谢李文博、卢星昊、常欢、张松林、李云勇、盛恩聪师弟，感谢宋佳、张亚静师妹，感谢你们的支持；感谢同课题组的赵俊武师兄、曲文奇、蔡坤阳、高慧华师弟、吴宇师弟，感谢你们的陪伴；感谢这个大家庭，祝愿你们前程似锦。

感谢我的未婚夫陈璐翔，感谢你六年来的陪伴与鼓励，感谢你包容我的缺点和任性，感谢你始终如一的关心与支持，愿得一人心，白首不相离。

特别感谢我的家人，感谢你们毫无保留的爱，感谢你们日复一日、年复一年的关心与照顾，感谢你们在我遇到挫折时对我的鼓励和支持，你们对我的全力支持和充分理解是我不断前行的动力。

最后，感谢所有曾经帮助过和批评过我的人，感谢你们。